

دوره کتاب
حبر

برای دانش آموزان دبستان و دبیرستان

(مطابق آخرین برنامه وزارت معارف)

و اقسام کتب فارسی فرانسه و عربی و غیره

جای فروش

تهران

خیابان ناصر خسرو * ناصریه سابق *

کتابخانه فردوسی



دوره فتر کتب کتابخانه ملی
 ۲۱۴۹۴
 شماره ثبت کتابخانه

۱۳۱۲ - شماره ثبت کتابخانه

جبر و معادله



شماره ثبت کتابخانه

برای سال پنجم و ششم متوسطه

مطابق برگرام وزارت جلیله معارف

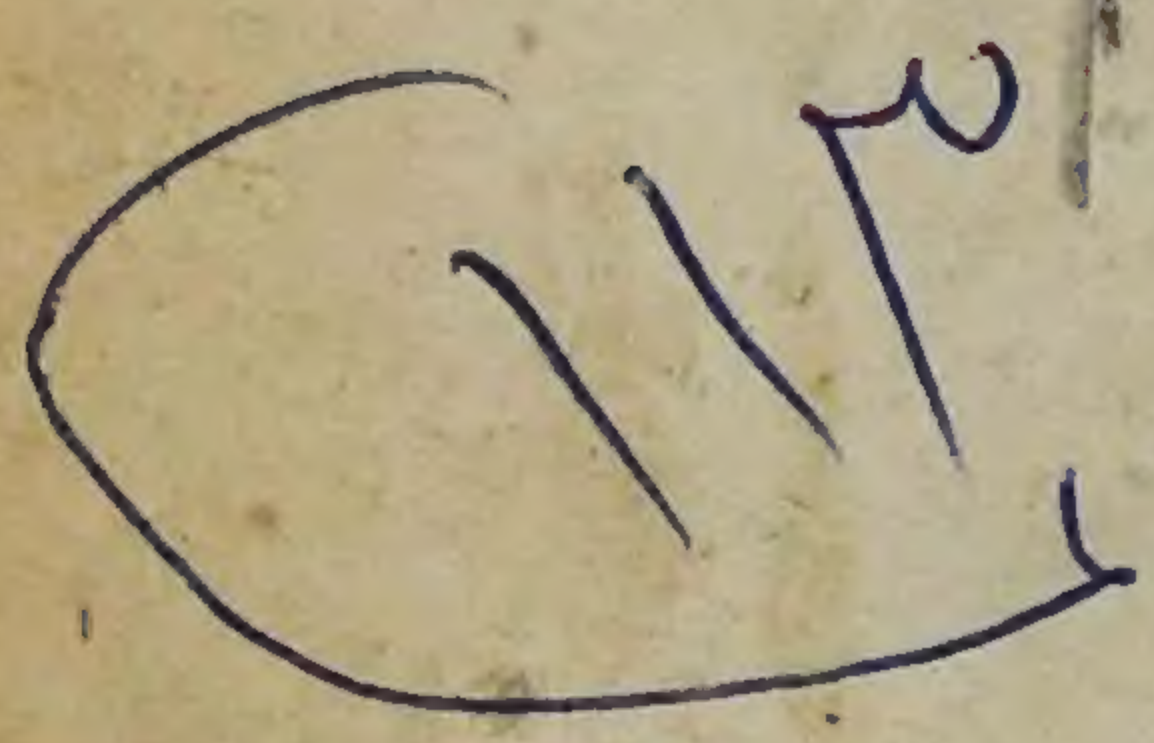
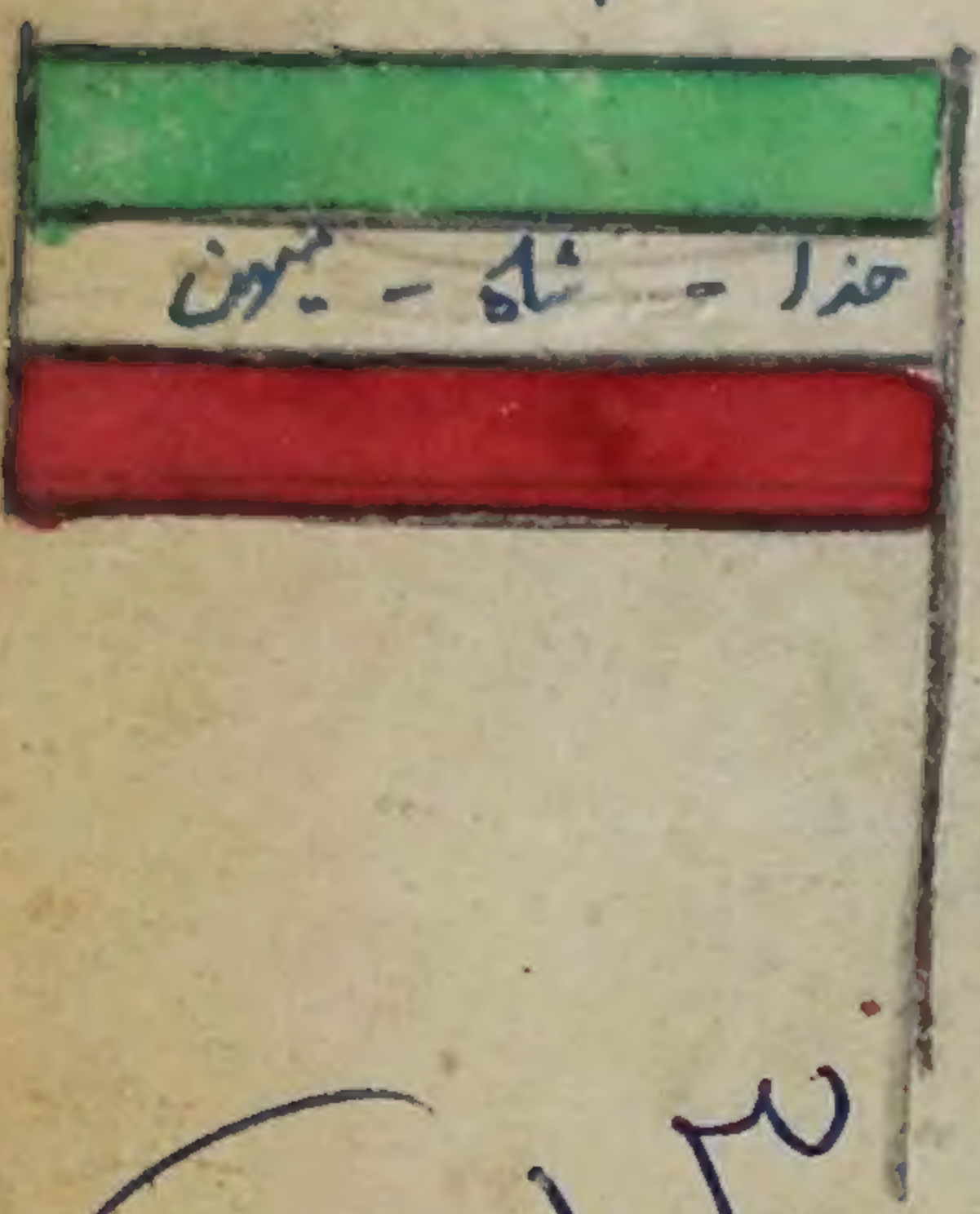
تألیف - محمود میران

معلم ریاضیات مدارس متوسطه و مدرسه متوسطه نظام

حق طبع محفوظ و مخصوص است بمؤلف

چاپ اول

طهران - شهریور ۱۳۱۲



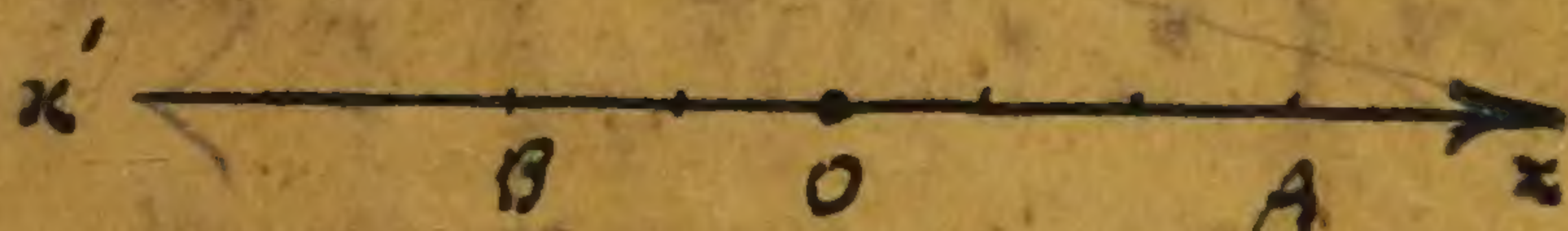
بنام ایزدوانا

تعاریف و اطلاعات مختصری از هندسه تحلیلی

۱- محور - خط مستقیم نامحدود x به x' را محور نامیده و در روی آن

جهت از x به x' را

جهت مثبت و نقطه O



مفروضه در روی

آزاداً اختیار میکنیم

جهت محور را عموماً با سهم مشخص مینمایند

فاصله هر نقطه مانند A واقع بر محور را از مبدأ O طول نقطه می‌نامند و آن مثبت

خواهد بود اگر گاه متحرکی از مبدأ O بجهت A حرکت کند در جهت مثبت محور

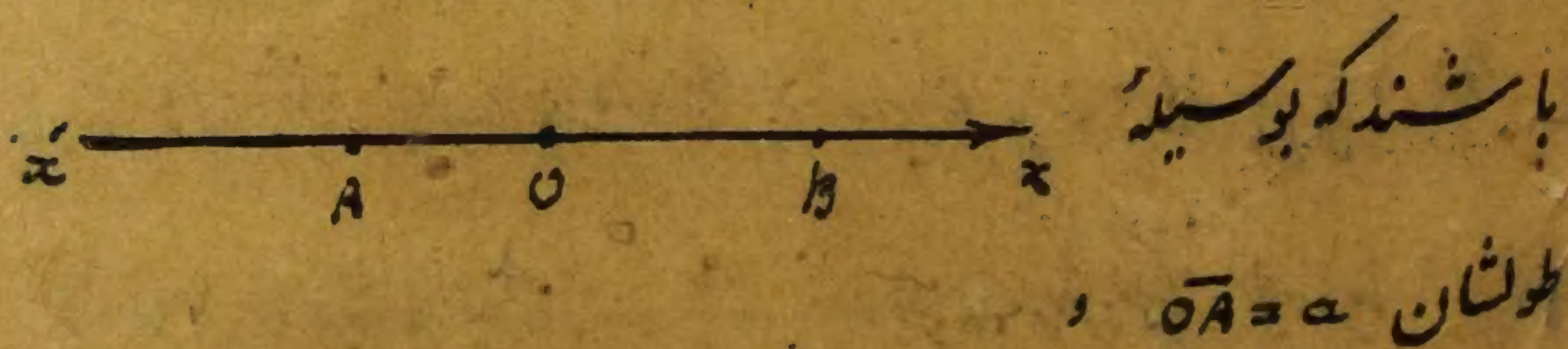
سیر نماید و در غیر این صورت منفی می‌باشد بنابراین طول A مثبت و طول B منفی می‌باشد

۲- واحد مقیاس - معمولاً طولهای OA و OB و نظایر آنها را

با واحد طول اندازه میگیرند ولی اغلب واحد مزبور را بمقیاس معینی تبدیل

بنمایند که آنرا واحد مقیاس نامیده و برای اندازه قطعات فوق بکار
 میبرند مثلاً اگر واحد مقیاس یک سانتیمتر و قطعه OA سه واحد مقیاس
 و قطعه OB دو واحد مقیاس باشد طول نقطه A عبارت میگردد از
 $OA = +3$ و طول نقطه B عبارت میگردد از $OB = -2$

۳- تغییر جبری نقاط محور - نمایش هندسی اعداد جبری -
 با تعریف فوق هر نقطه واقع بر محور را میتوان فقط بیک عدد جبری تعبیر نمود و بالعکس
 هر عدد جبری را میتوان فقط بیک نقطه محور نمایش داد مثلاً ۵ - نظیر
 نقطه ایست از نیم خط OX که از نقطه O با فاصله ۵ واحد مقیاس باشد
 ۴- محاسبه طول قطعه خطی بر محور - فرض میکنیم A و B
 دو نقطه واقع بر محور OX باشند که بوسیله



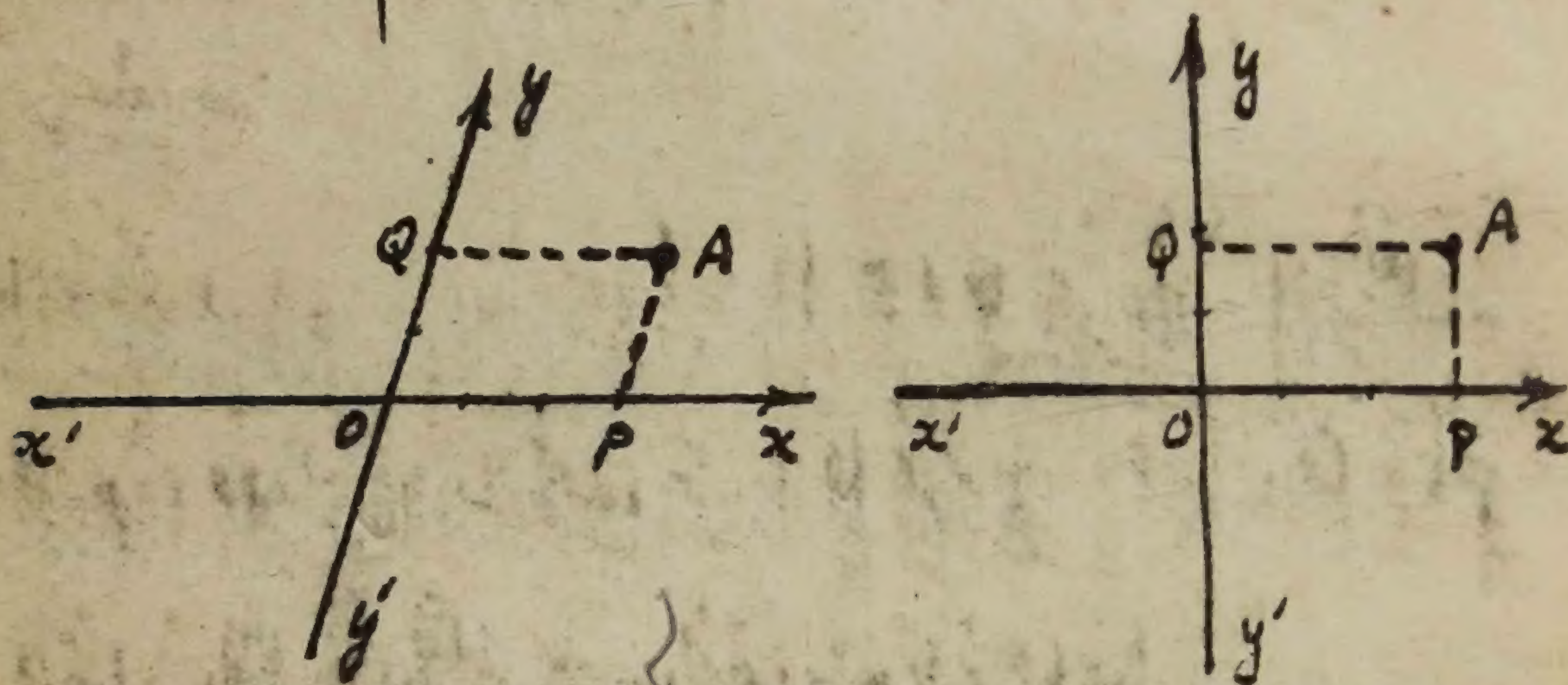
$OB = b$ مشخص باشند حال برای محاسبه فاصله آنها AB

بر وفق رابطه مثال همواره میتوان نوشت $AB + BO + OA = 0$

و از اینجا $AB = OB - OA$ یا $AB = b - a$

یعنی طول هر قطعه خط متکی بر محور مساویست با تفاضل طول مثبتی
و مبدأ آن

۵- مختصات نقطه - مختصات قائم - دو محور $x'x$ و $y'y$



را که در نقطه O یکدیگر را قطع کرده اند اختیار میکنیم حال چون نقطه مانند A را

در سطح دو محور فوق فرض نموده از این نقطه دو خط موازی محور را رسم کنیم تا نقاط

P و Q بدست آید قطعه خط OP را طول یا x یا $abscisse$ و

نقطه A و قطعه خط OQ را عرض یا y یا $ordonnée$

نقطه A و دستگاه OP و OQ را که همیشه با دو عدد جبری نمایش داده

میشوند مختصات نقطه A مینامند

و دو محور فوق را محور مختصات و نقطه O را مرکز مختصات گویند

مثلاً هرگاه $OP = +۳$ و $OQ = +۲$ باشد مختصات نقطه A

عبارت میگردد از $۳ + ۲ + ۱$ که آن را چنین بنویسند $A | \begin{matrix} x=۳ \\ y=۲ \end{matrix}$

و یا $A(۳ و ۲)$ که خوانده میشود A مختصات $۲ و ۳$

چنانکه ملاحظه میشود در نمایش مختصات نقطه همیشه طول نقطه را مقدم بر عرض آن ذکر نمایند

در حالتیکه دو محور برهم عمود باشند نقاط P و Q بر ترتیب تصاویر نقطه A بر دو محور بوده و در این حالت مختصات را قائم گویند و ما در این کتاب آنچه راجع بمختصات نقطه بیان میکنیم مقصود مختصات قائم میباشد از تعریف فوق نتایج ذیل حاصل میشود:

- ۱- طول نقاط واقع بر محور y و همچنین عرض نقاط واقع بر محور x صفر و بنا بر این طول و عرض نقطه O که بر هر دو محور واقع است مساوی صفر میباشد
- ۲- مختصات نقاط واقع در داخل زاویه yOx هر دو مثبت و مختصات نقاط واقع در داخل زاویه $x'Oy$ هر دو منفی و طول نقاط واقع در داخل زاویه $y'Ox$ مثبت و عرض آنها منفی میباشد
- ۳- مختصات نقاط واقع در داخل زاویه xOy' هر دو منفی و طول نقاط واقع در داخل زاویه $y'Ox$ مثبت و عرض آنها منفی میباشد
- ۴- مختصات نقاط واقع در داخل زاویه $x'Oy$ هر دو مثبت و مختصات نقاط واقع در داخل زاویه $y'Ox$ هر دو منفی و طول نقاط واقع در داخل زاویه $x'Oy$ مثبت و عرض آنها منفی میباشد
- ۵- مختصات نقاط واقع در داخل زاویه $y'Ox$ هر دو مثبت و مختصات نقاط واقع در داخل زاویه $x'Oy$ هر دو منفی و طول نقاط واقع در داخل زاویه $y'Ox$ مثبت و عرض آنها منفی میباشد
- ۶- تعبیر جبری نقاط واقع در یک صفحه - نمایش هندسی

دستگاه دو عدد جبری - بنا بر تعریف فوق هر نقطه واقع در سطح دو محور را
می‌توان فقط بیک دستگاه مرکب از دو عدد جبری تعبیر نمود و بالعکس هر دستگاه

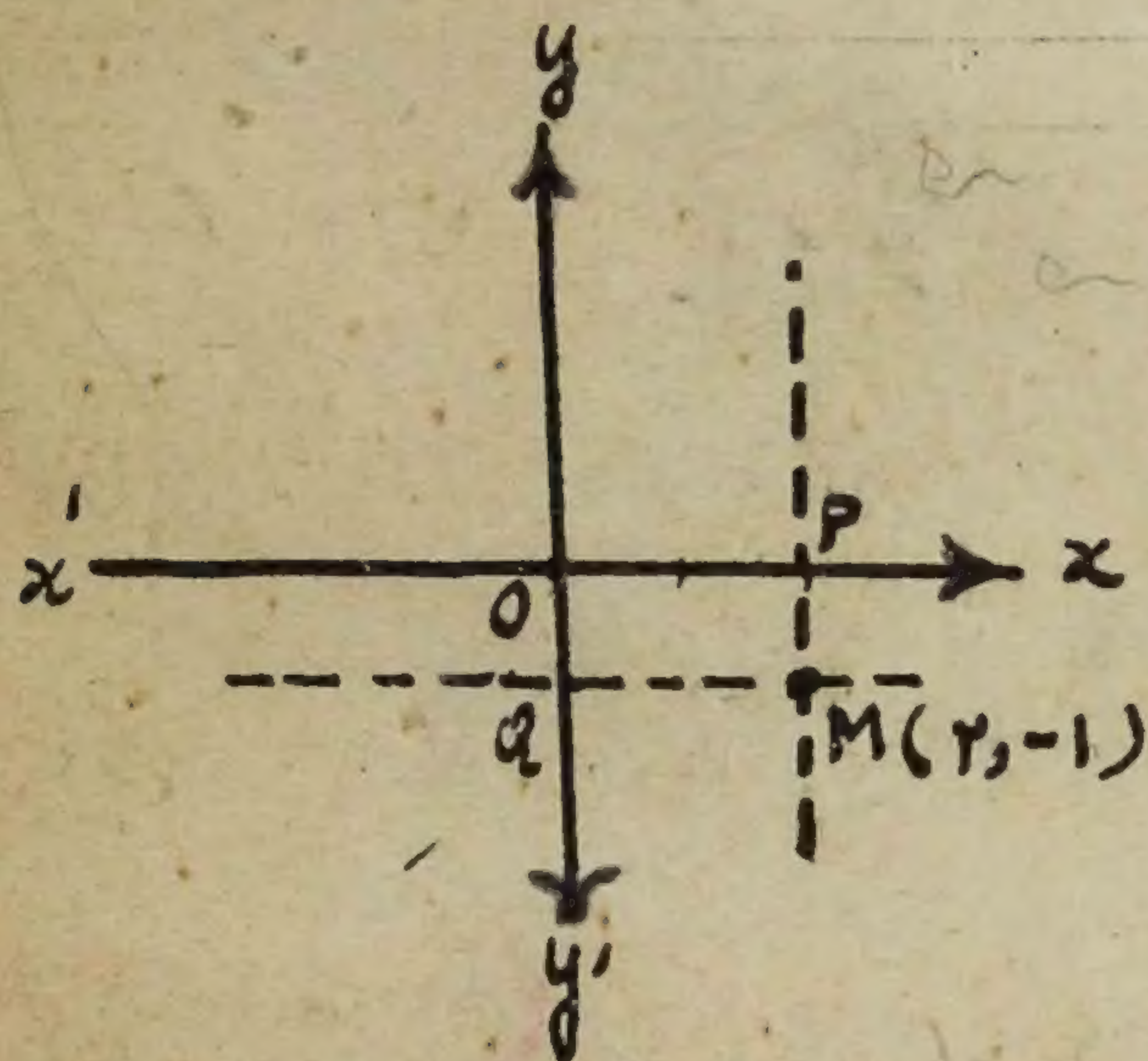
مرکب از دو عدد جبری را می‌توان

بیک نقطه واقع در سطح دو محور

نمایش داد مثلاً چون دستگاه

دو عدد جبری $۲ + ۱i$ را

فرض نموده از مبدأ O در روی



محور x طول OP را مساوی $۲ +$ جدا نموده از نقطه P عمودی بر محور x

اخراج کنیم این عمود مکان نقاطی خواهد بود بطول $۲ +$ و همچنین اگر از مبدأ O

در روی محور y طول OQ را مساوی $۱ -$ اختیار نموده از نقطه Q

عمودی بر محور y اخراج کنیم این عمود مکان نقاطی است بعرض $۱ -$

و چون این دو عمود قطعاً در نقطه مانند M تلاقی نمایند بنا بر این نقطه M تنها

نقطه است بمختصات $۲ + ۱i$ - که نمایش هندسی دستگاه دو عدد جبری

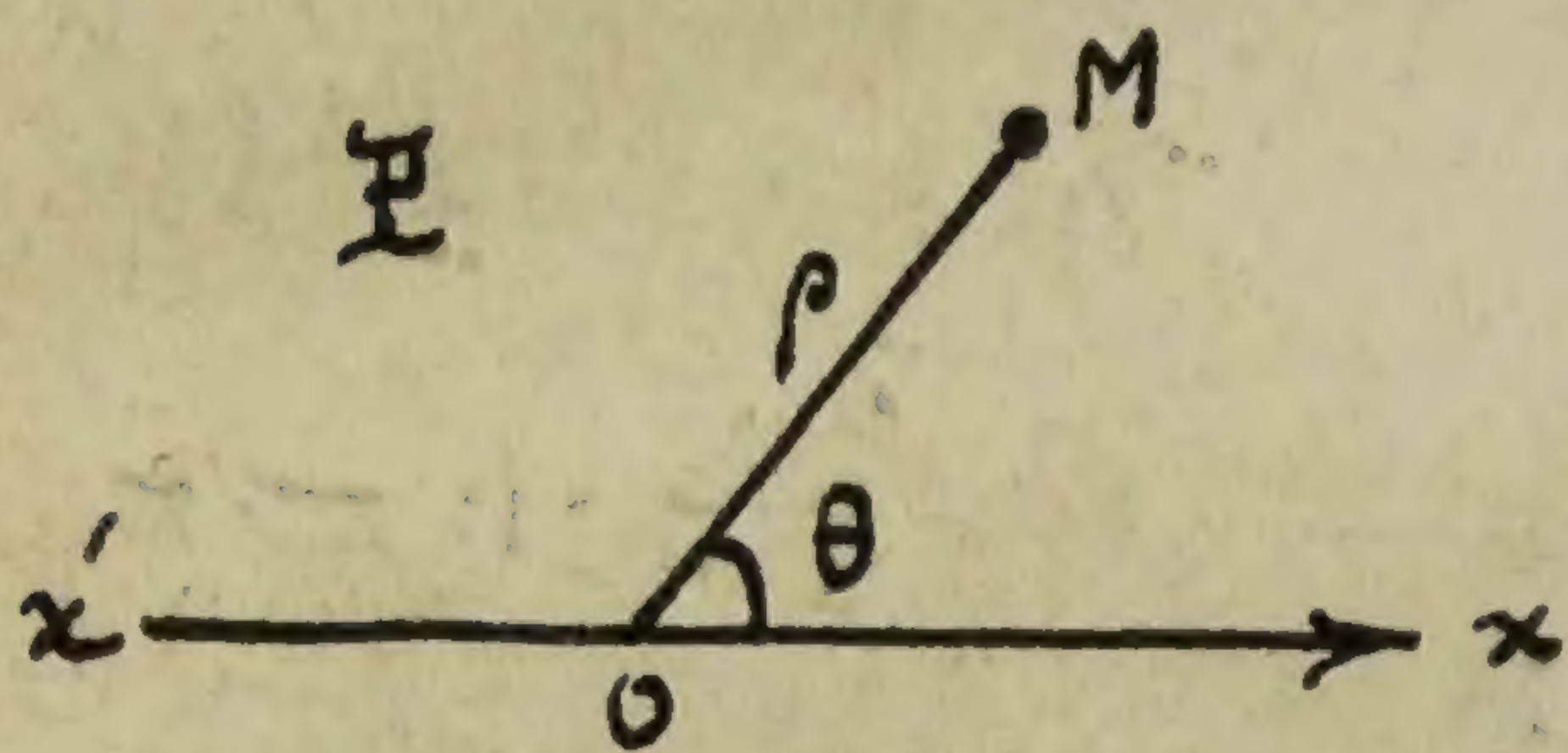
$۲ + ۱i$ - میباشد

۷ - مختصات قطبی - غیر از مختصاتی که در فوق برای نمایش

نقاط یک صفحه بیان نمودیم در هندسه تحلیلی مختصات دیگری نیز بکار میرود که آنرا مختصات قطبی گویند از استقرار محوری مانند x و x' در صفحه \mathcal{P} اختیار

نموده و هر نقطه مانند M واقع در آن

صفحه را بواسطه فاصله $OM = \rho$



و زاویه $\angle MOx = \theta$

مشخص نمایند و می نویسند $M(\rho, \theta)$

محور x را محور قطبی و نقطه O را قطب و OM را شعاع حامل و

و مختصات فوق را مختصات قطبی بنامند

۱- تعبیر جبری نقاط فضائی - نمایش هندسی دستگاه

سه عدد جبری - در هندسه تحلیلی برای نمایش نقاط فضائی مانند M

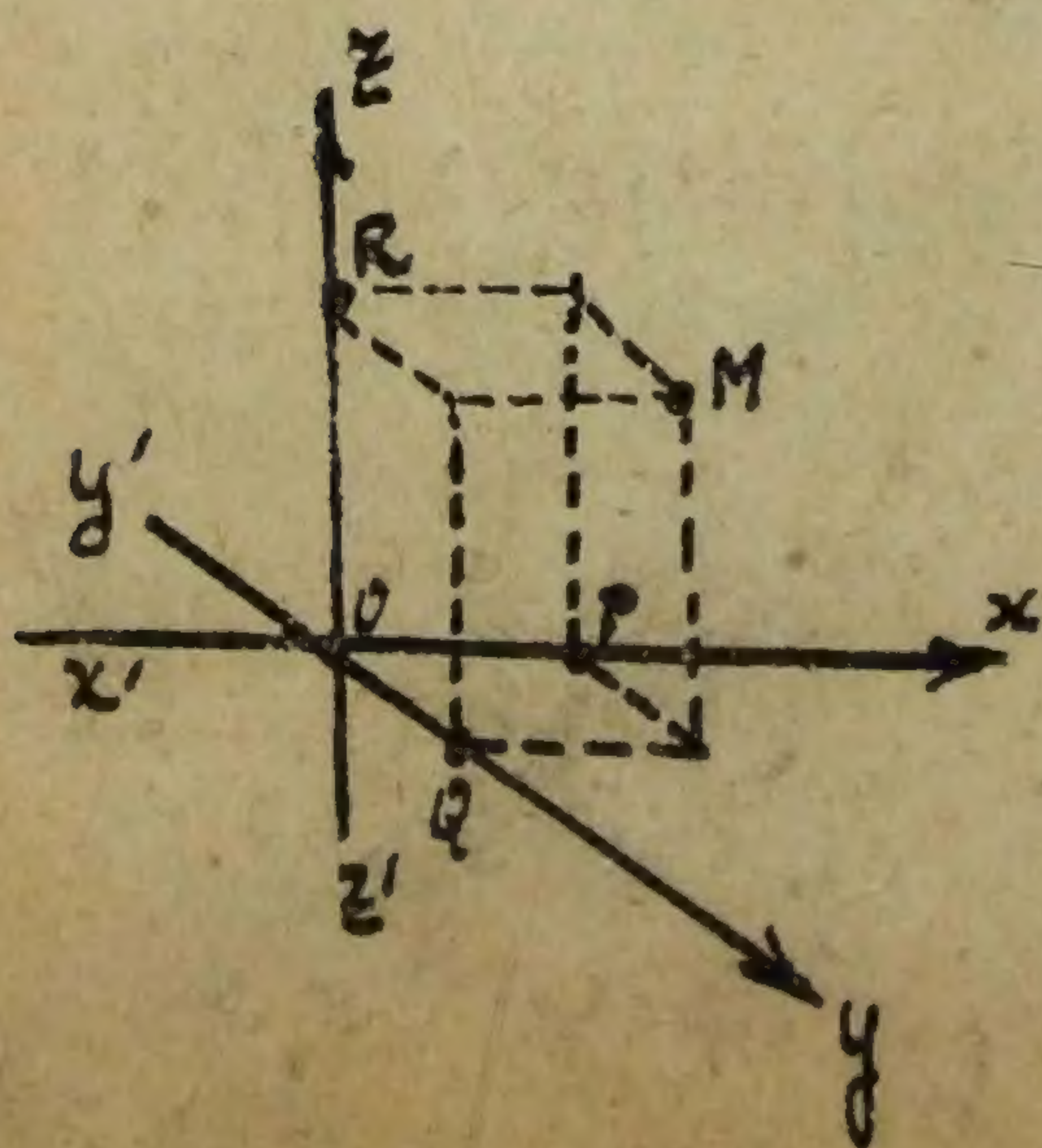
از نقطه O محور ثالث z را بر صفحه xoy

عمود نمایند بان شکل دستگاهی برکت

از سه محور بدست میاید حال نقطه M را

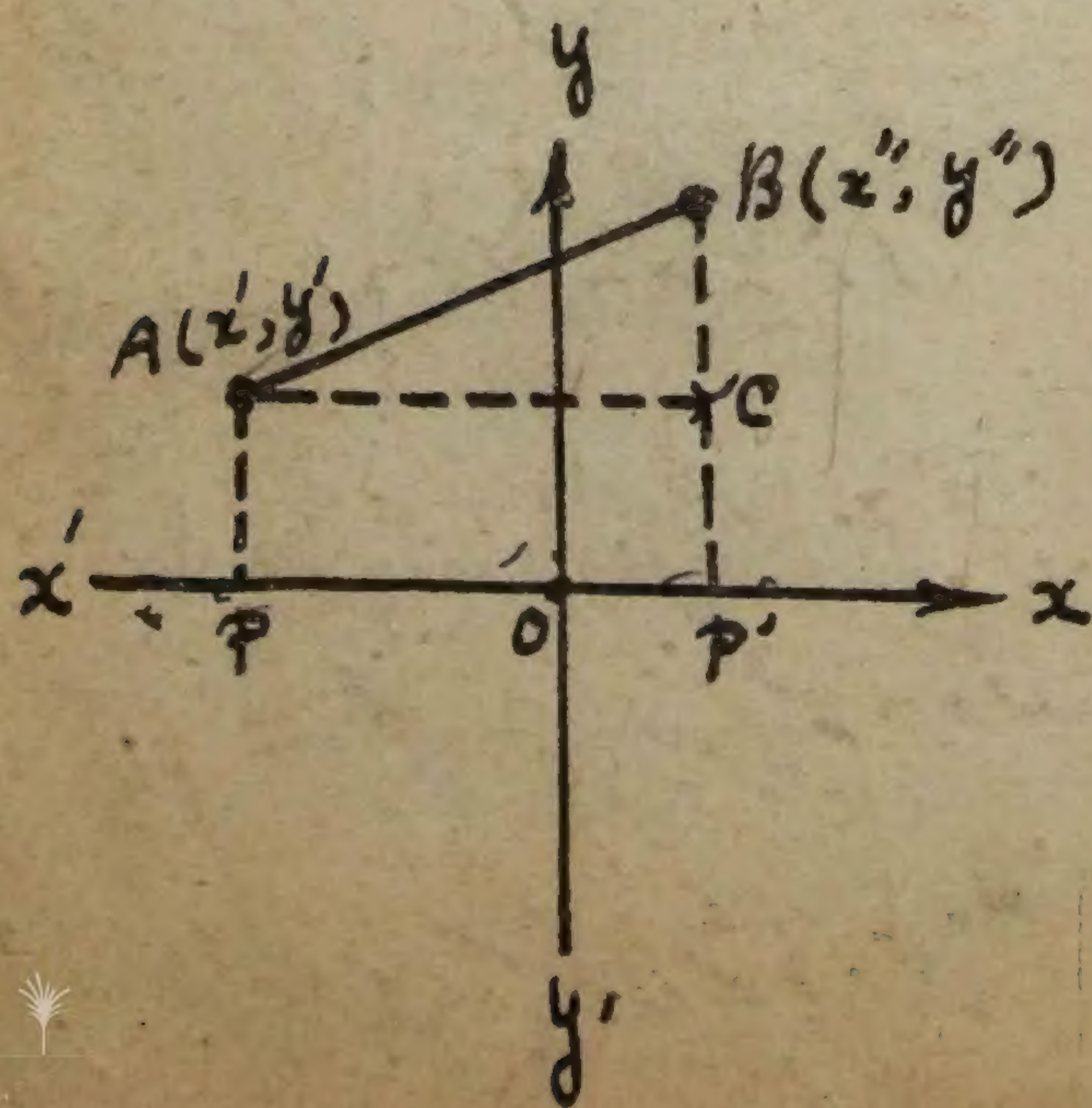
بر هر یک از سه محور در نقاط P و Q

و R تصویر نمایند در این صورت بر OP



و OQ یعنی طول و عرض نقطه M عدد جبری دیگری اضافه میشود و آن انداز OR میباشد که آنرا ارتفاع یا z نقطه M مینامند بطوریکه نظیر هر نقطه فضائی M دستگاهی مرکب از سه عدد جبری x و y و z بدست میاید که آنها را مختصات نقطه فضائی M گویند و بالعکس نظیر هر دستگاه مرکب از سه عدد جبری فقط یک نقطه فضائی مشخص میگردد که آنرا نمایش هندسی این دستگاه گویند چه با وجود سه عدد جبری فوق سه نقطه P و Q و R بر سه محور مشخص میشود که نقطه مطلوب M رأس تقاطع O از کعب مستطیلی است که بر روی OP و OQ و OR بنا شود

۹- فاصله دو نقطه - چون نقطه با مختصات آن مشخص است بنا بر این میتوان فاصله دو نقطه را که مختصات آنها در دست باشد حساب نمود با نظریتی که دو نقطه مانند



$A(x', y')$ و $B(x'', y'')$

را فرض نموده AB را

وصل می کنیم از مثلث قائم الزامی

ABC حاصل میشود :

ولی بنا بر آنچه می دانیم هر وضعی که نقاط مفروض اختیار

شوند همواره $\overline{AC} = x'' - x'$ و $\overline{CB} = y'' - y'$ می باشد

که چون در رابطه فوق منظور کنیم حاصل میشود :

$$\overline{AB}^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2$$

$$AB = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2} \quad \text{و از آنجا}$$

حالت مخصوص — فاصله نقطه از مبدأ — چون مختصات

مبدأ صفر است لذا فاصله هر نقطه $M(x, y)$ از مبدأ ۰ عبارت میگردد

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{از}$$

۱. — مختصات وسط خطی که مختصات طرفین آن معلوم باشد

دو نقطه مانند $A(x', y')$ و $B(x'', y'')$ را اختیار نموده

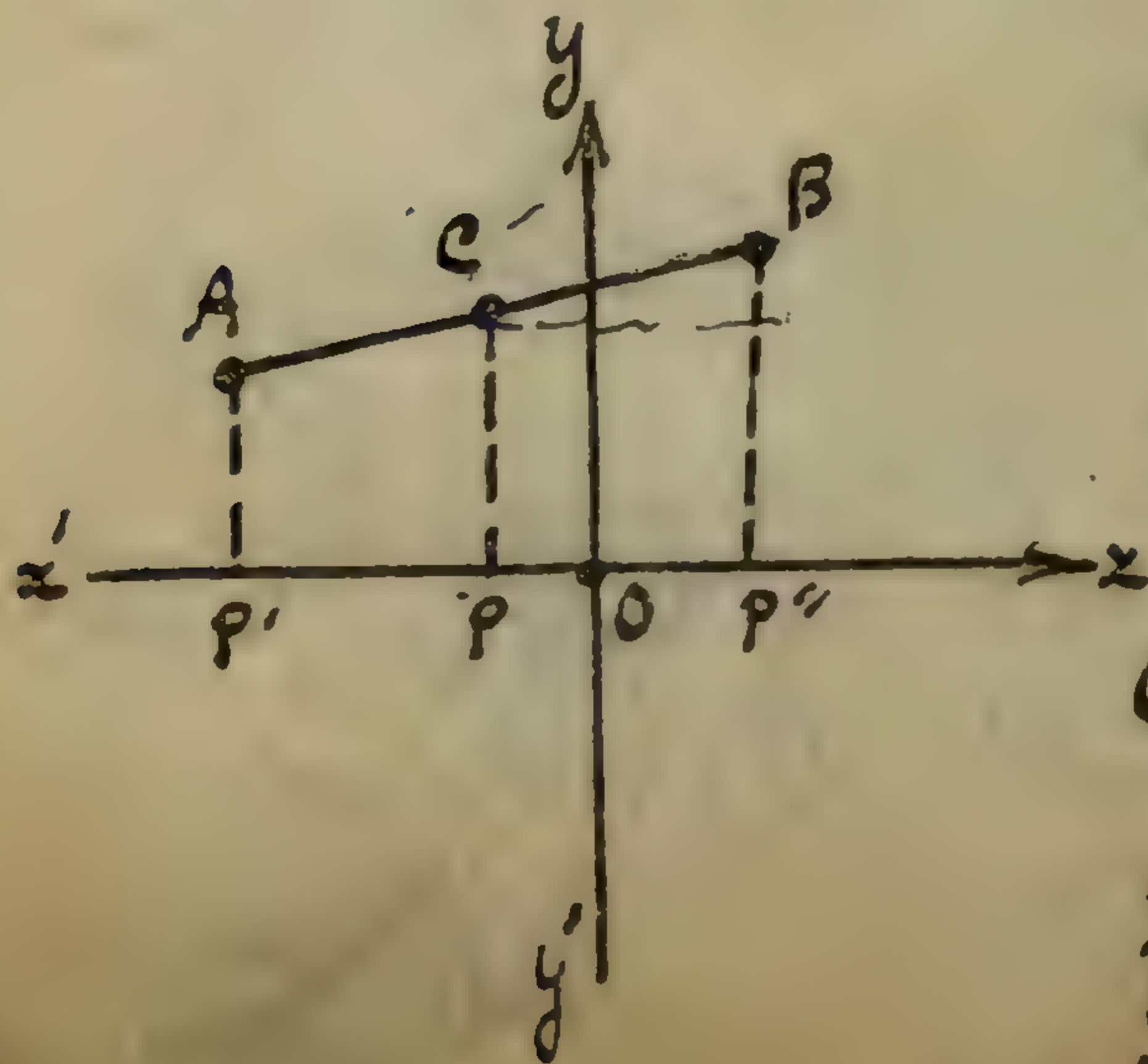
و فرض میکنیم نقطه C وسط AB باشد

چون مختصات C را x و y فرض نموده

نقاط A و B و C را بر محور x و x'

در نقاط P' و P'' و P تصویر کنیم هر وضعی

که نقاط مفروض اختیار شوند بر طبق رابطه



مثال میتوان نوشت :

$$(۱) \quad \overline{OP} = \overline{OP'} + \overline{P'P} \quad \text{و یا} \quad \overline{OP'} + \overline{P'P} + \overline{PO} = 0$$

$$(۲) \quad \overline{OP} = \overline{OP''} + \overline{P''P} \quad \text{و یا} \quad \overline{OP''} + \overline{P''P} + \overline{PO} = 0$$

حال اگر روابط (۱) و (۲) را با یکدیگر جمع کنیم حاصل میشود :

$$2\overline{OP} = \overline{OP'} + \overline{OP''} \quad \text{و یا} \quad 2x = x' + x''$$

و از اینجا $x = \frac{x' + x''}{2}$ و همچنین اگر نقاط مفروض را بر محور $y'y'$ تصویر

نموده بطریقه فوق عمل کنیم نتیجه میشود $y = \frac{y' + y''}{2}$ یعنی :

مختصات وسط هر خط واسطه عدیست مابین مختصات طرفین آن

۱۱- نمایش هندسی معادلات - تعبیر جبری بعضی خطوط - چون

در معادله دو مجهولی $y = x^2 - 2x - 3$ برای x مقادیر احتمالی

مانند ۲- ۱- ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ... فرض نموده

و مقادیر نظیر آنها را برای y از روی معادله فوق حساب نموده در جدول

ذیل مرتب کنیم حاصل میشود :

x	...	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳	۴
y	...	۵	۰	-۳	-۴	-۳	۰	۵

حال اگر نقاط A و B و C و D و E و F و G و ... نظیر دستگاه

x و y فوق را که در معادله مفروض صدق نمایند در سطح دو محور قائم x'

و y' تعیین کنیم این

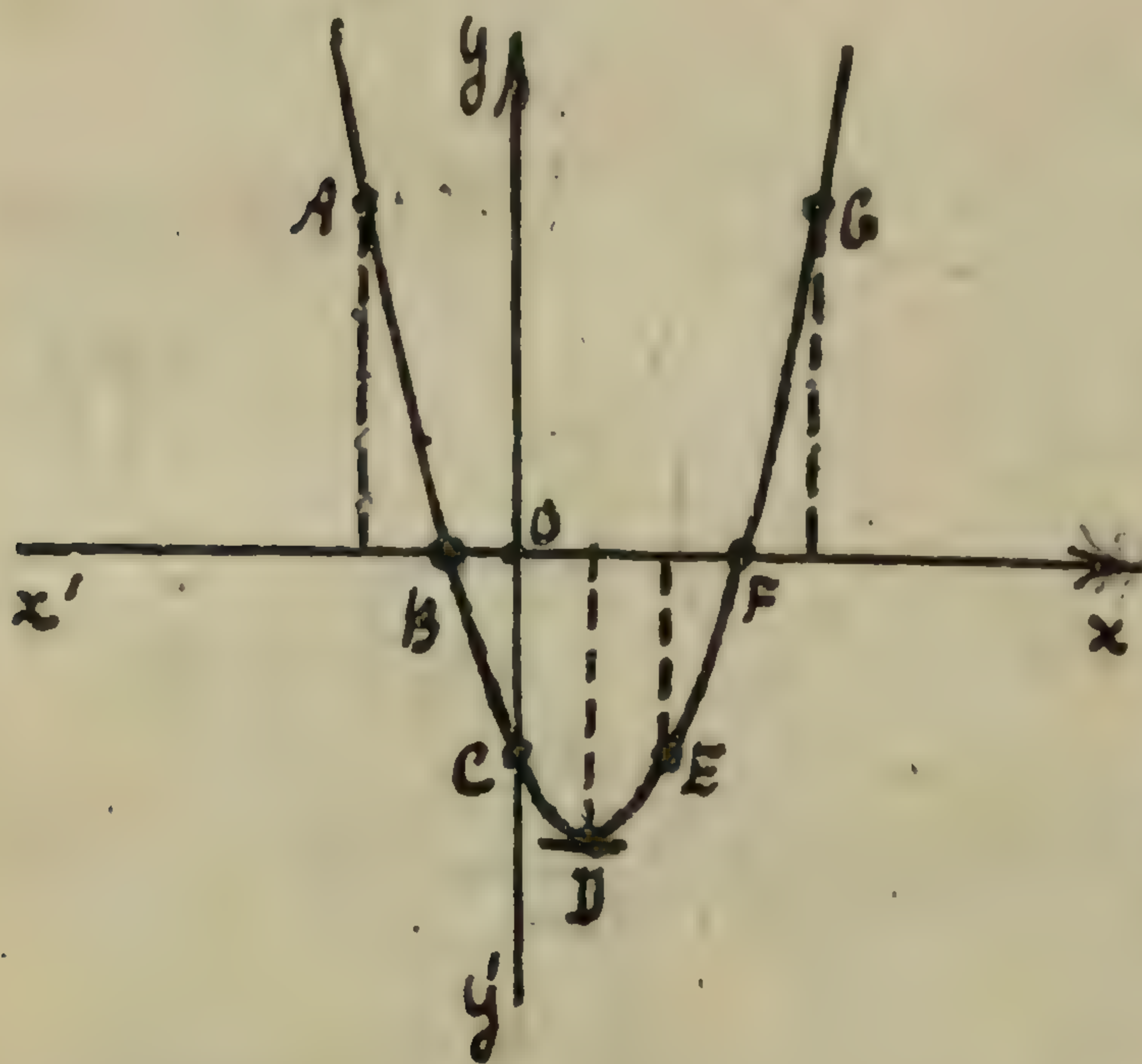
نقاط که عده آنها بطور

اختیار تا بینایت

ممکن است فرض شود

من حیث المجموع تشکیل خطی

را میدهند که آن را



نمایش هندسی معادله دو مجهولی $y = x^2 - 2x - 3$ میباشد

و اختصاص این خط آنست که مکان نقاطی است که مختصات آنها در معادله

مفروض صدق نمایند

از اینقرار برای هر معادله بصورت $f(x, y) = 0$ میتوان بطریق

فوق خطی که نمایش هندسی آنست رسم نمود و ما بعداً در این کتاب قاعده کلی

برای رسم این قیاسیات بیان خواهیم نمود

بالعکس همواره ممکن است برای بعضی خطوط که بتوان آنها را تحت تعریف هندسی

قرار داد تعبیر جبری بدست آورد که از آن معادله آن خط سینما شد مثلاً

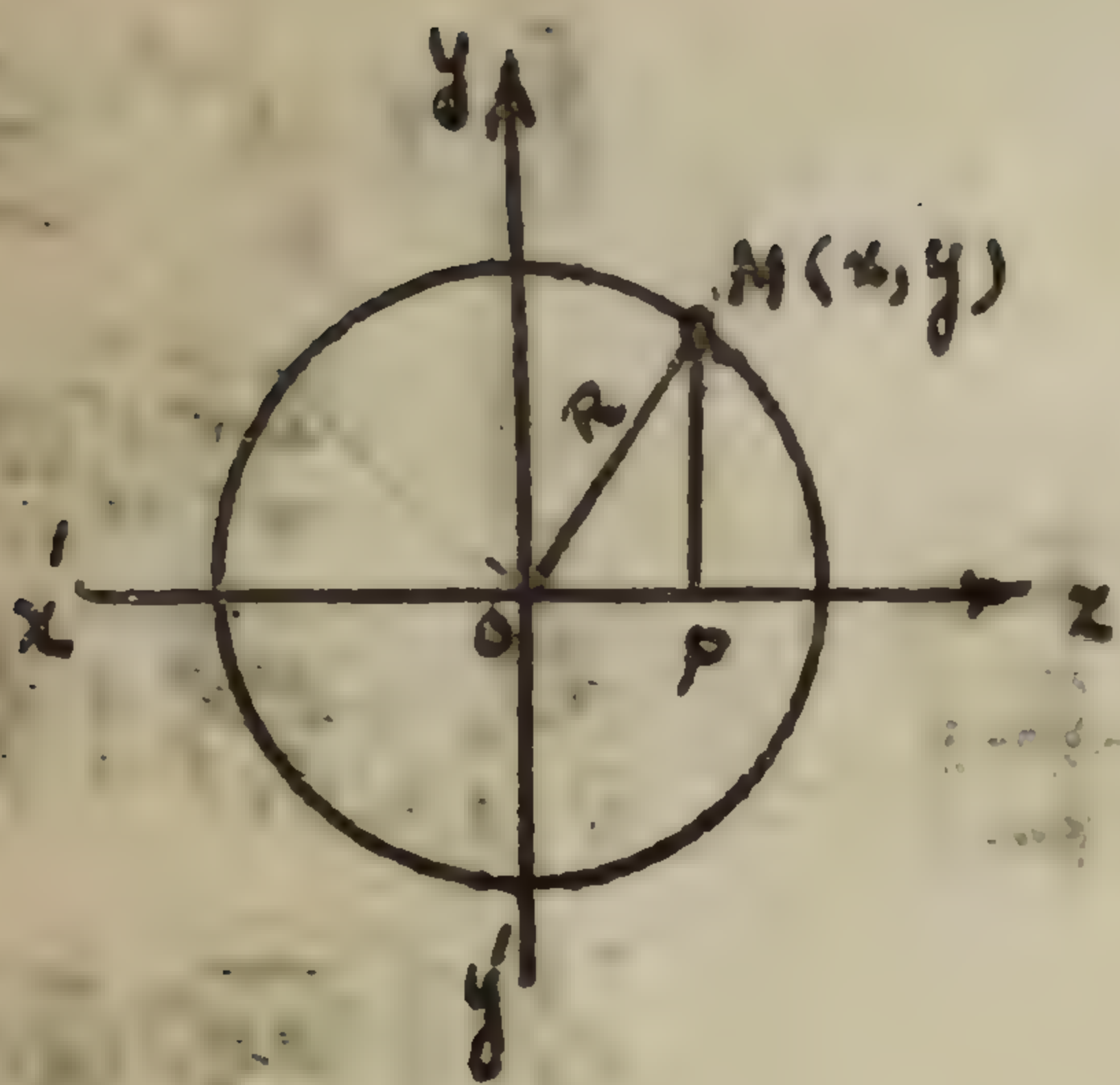
چون دایره شعاع معلوم R

انتخاب کنیم و دو قطر قائم

آنها محور مختصات قرار دهیم و

نقطه غیر مشخص M را در روی آن

انتخاب نموده مختصات آنرا



x و y فرض کنیم ملاحظه میشود که نظیر هر وضع نقطه M در روی دایره فوق

بنابر تعریف دایره $\overline{OP} + \overline{PM} = \overline{OM}$ و یا $x^2 + y^2 = R^2$ میباشد بطوریکه این معادله تغییر جبری دایره فوق و یا تعبیر آن را معادله

دایره شعاع R نسبت به دو محوری که دو قطر قائم آن باشد خواهد بود

۱۲- تغییر محور مختصات - دو محور قائم x و y نقطه

$M(x, y)$ را فرض میکنیم

حال اگر دو محور را به موازات خود حرکت دهیم تا بوضع x' و y' و بنابراین

مبدأ مختصات بوضع O_1 در آید نقطه M نسبت به دستگاه دو محور جدید

دارای مختصات جدیدی می باشد که آنرا x و y فرض میکنیم و چون

مختصات مبدأ جدید O_1 را نسبت به دستگاه قدیم O و h فرض کنیم بر طبق

رابطه مثال با زاویه مقدار

مثبت و منفی a و b

میتوان نوشت :

$$\vec{OO'} + \vec{O'P} + \vec{PO} = 0$$

$$\vec{O'P} = \vec{O_1P} = \vec{OP} - \vec{OO_1}$$

$$x = x - a$$

$$\vec{PP'} + \vec{P'M} + \vec{MP} = 0$$

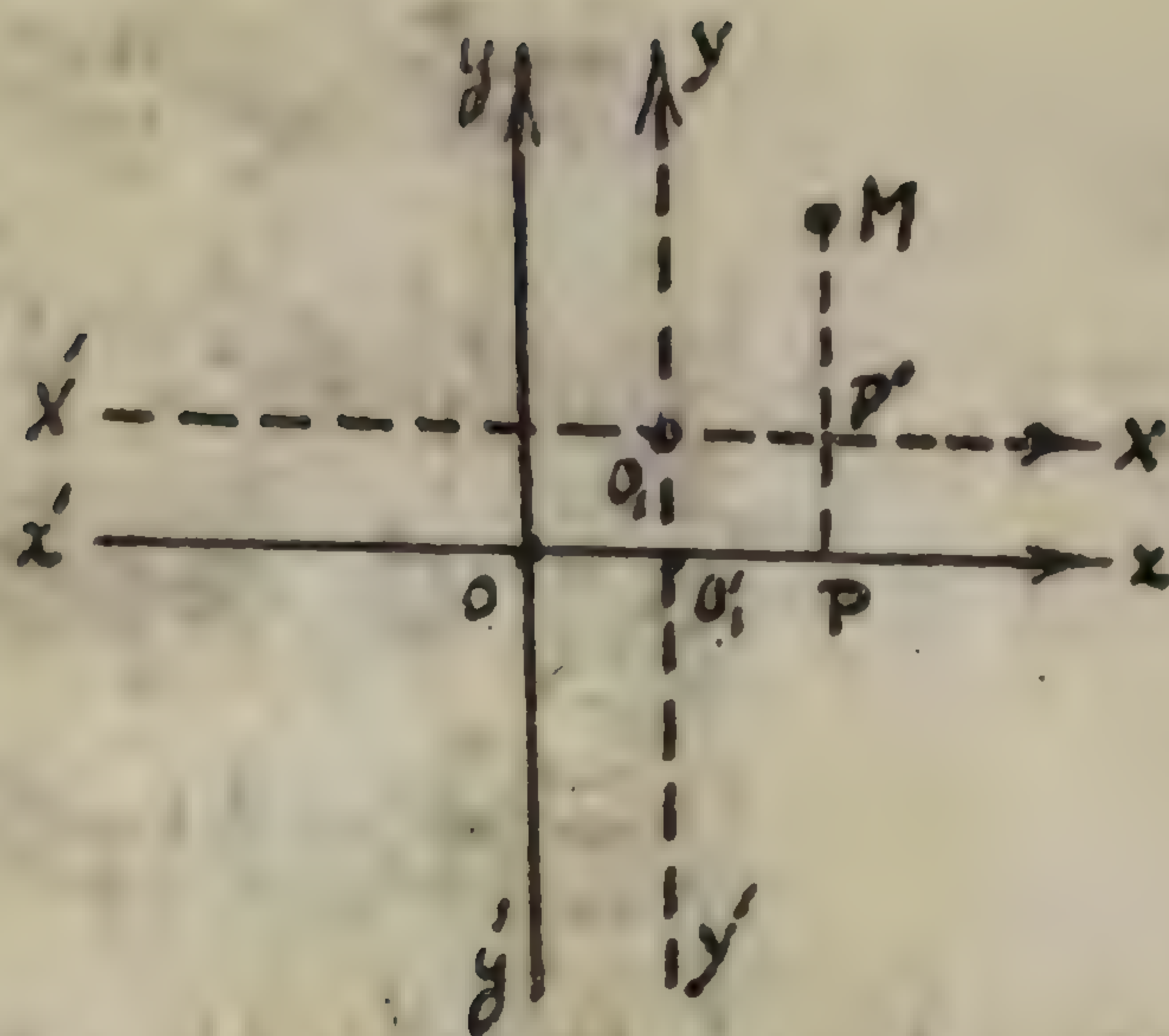
$$\vec{P'M} = \vec{PM} - \vec{PP'} \quad \text{و یا} \quad y = y - b$$

بطوریکه میتوان گفت :

مختصات نقطه فرض M نسبت به دستگاه جدیدی مبدأ
 را برابر است با تفاضل مختصات نظیر نقاط M و O_1 نسبت
 به دستگاه قدیم

حالات مخصوص - در حالتی که فقط محور x به x' بموازات خود حرکت

نماید و عبارتة آخری مبدأ در روی محور y تا تغییر مکان دهد طول مبدأ حبیث
 همواره مساوی صفر بوده و چون عرض آنرا نسبت به دستگاه قدیم b فرض

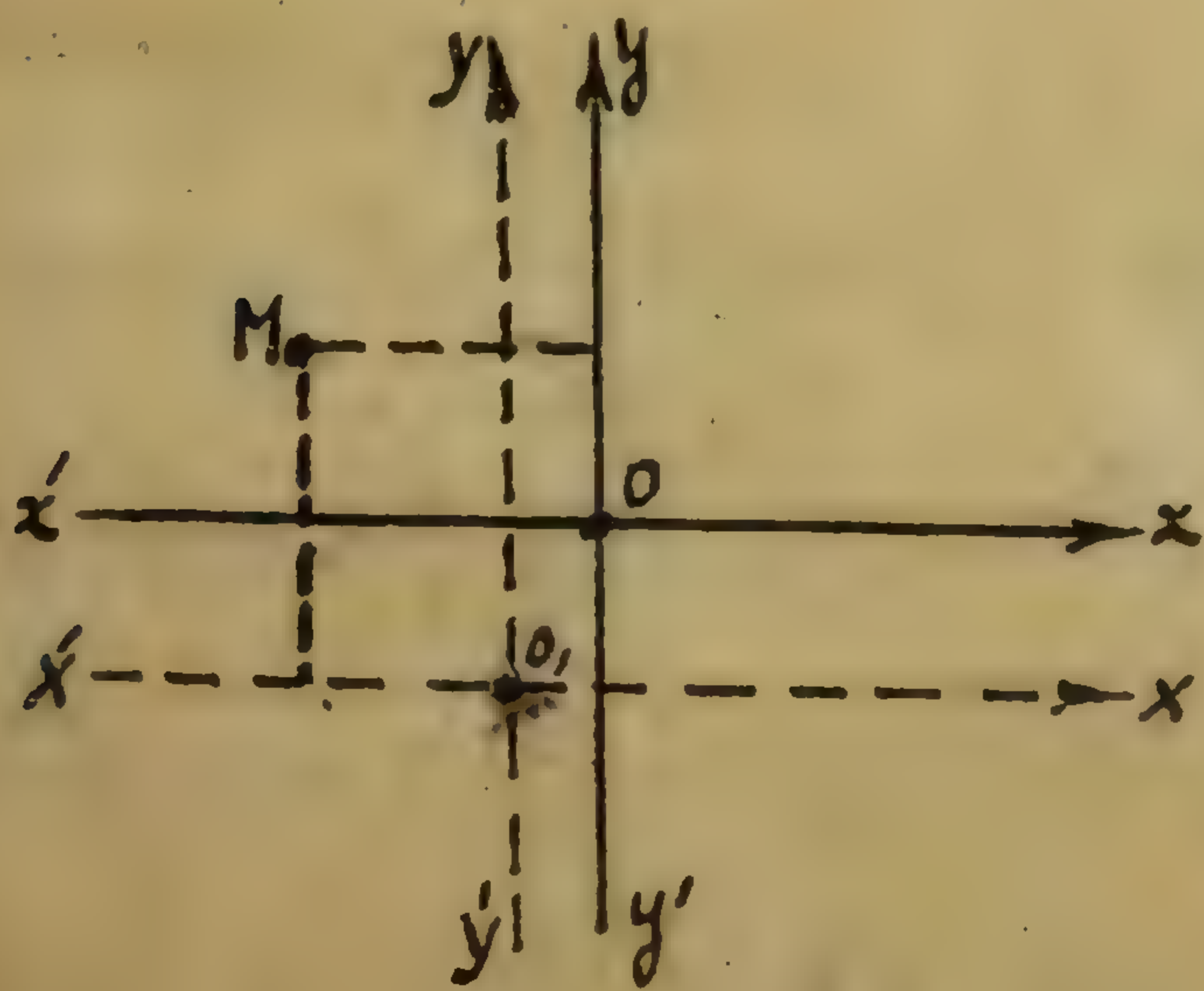


کنیم مختصات جدید نقطه M عبارت میگردد از $\begin{cases} x = x \\ y = y - b \end{cases}$
 همچنین اگر فقط محور $y'y'$ موازات خود حرکت نماید یعنی مبدأ در روی محور
 x تغییر مکان دهد عرض مبدأ جدید مساوی صفر و چون طول آنرا نسبت
 به دستگاه قدیم a فرض کنیم مختصات جدید نقطه M عبارت میگردد از :

$$\begin{cases} x = x - a \\ y = y \end{cases}$$

مثال ۱- فرض میکنیم مختصات نقطه M نسبت به دو محور قائم ۳- و ۲ باشد
 بنابراین آنچه گفتیم هرگاه دو محور موازات خود حرکت نمایند بطریقی که مختصات
 مبدأ جدید O_1 نسبت به دستگاه قدیم ۱- و ۲- گردد مختصات جدید نقطه

M عبارت میگردد



$$x = -3 + 1 = -2$$

$$y = 2 + 2 = 4$$

مثال ۲- هرگاه در

$$y = x^2 - 2x - 3$$

که آنرا بقدر رسم نمودیم فرض کنیم که دو محور موازات خود حرکت نموده و مبدأ
 جدید نقطه $A(-2, 5)$ گردد چون مختصات جدید نقاط منحنی را x و y

فرض کنیم بار دیگر آنچه گفتیم میتوان نوشت: $x = x + 2$ و $y = y - 5$ و از آنجا $x = x - 2$ و $y = y + 5$

که چون در معادله مفروض قرار بدسیم حاصل میشود $y + 5 = (x - 2)^2 - 2(x - 2) - 3$

$$y = x^2 - 6x$$

که معادله جدید منحنی است نسبت به دو محور $x'x$ و $y'y$ بمبدأ A

مسائل

۱- نقاط ذیل را در سطح دو محور قائم تعیین کنید:

$$A (3 و 0)$$

$$B (0 و -2)$$

$$C (1 و 5)$$

$$D (-3 و -4)$$

$$E (2 و -2)$$

$$F (-4 و +3)$$

۲- محضات فریة نقاط فوق را اولاً نسبت به محور $x'x$ ثانیاً نسبت به محور $y'y$

ثالثاً نسبت بمبدأ O معلوم کنید

۳- دو نقطه P و Q در روی محور $x'x$ اولی بطول ۳- و دومی بطول ۱ مفروض

است مطلوب است محاسبه قطعات PQ و QP

۴- هرگاه طول P را p و Q را q فرض کنیم قطعات فوق را حساب کنید

۵- نقاط $A (4 و 1)$ و $B (0 و -3)$ و $C (1 و -2)$ و $D (-3 و -6)$

مفروضند فاصله آنها را از یکدیگر و همچنین از مبدأ O حساب کنید

۶- مختصات اوساط قطعه خطهای مسئله قبل را معلوم کنید

۷- مختصات رؤس مثلث عبارتست از $A(3, 3)$ و $B(-1, 5)$ و

$C(4, 2)$ مطلوبست اولاً رسم مثلث ثانیاً محاسبه طول اضلاع و محیط آن ثالثاً

محاسبه طول میانه AM

۸- نمایش هندسی معادلات ذیل را بوسیله تعیین یک عدد نقاط آن بطور تقریب رسم نماید

$$x - y = 1$$

$$2x + 3y = 4$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$y^2 = 4x$$

$$y = (x - 2)^2$$

۹- نقاط $A(2, -1)$ و $B(-3, 5)$ مفروضند فرض میکنیم یک یا برد

محور بوازاات خود تغییر مکان دهند بطریقیکه مختصات مبدأ جدید اولاً نقطه $O_1(5, -4)$

ثانیاً نقطه $O_2(2, 5)$ ثالثاً $O_3(-3, 4)$ گردد در اینصورت مختصات جدید

نقاط را حساب کنید

۱۰- معادلات جدید خطوط و منحنیات مسئله مره ۸ را بر گاه مبدأ مختصات نقاط

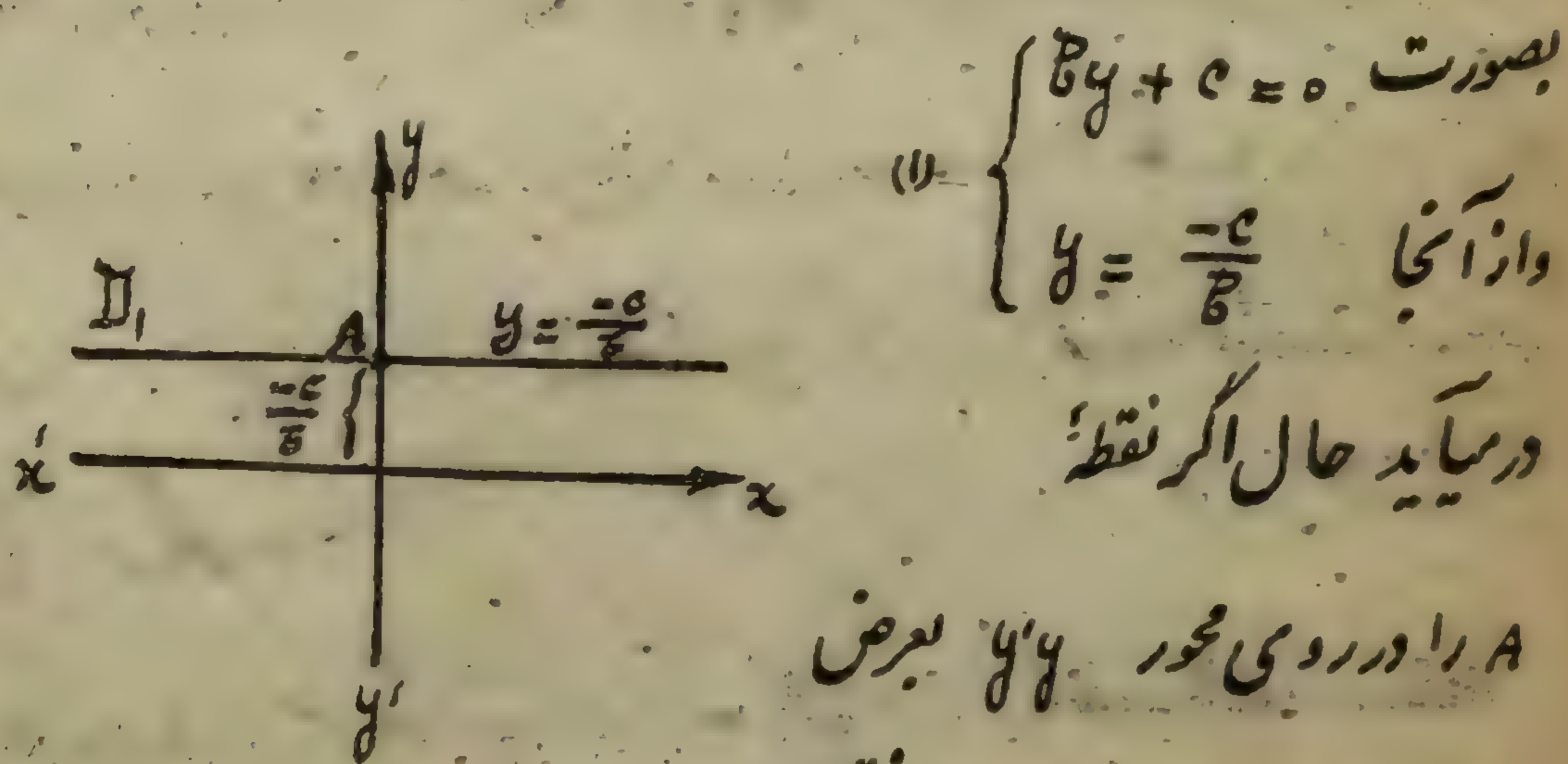
O_1 و O_2 و O_3 باشد معلوم نمایند

خط مستقیم

۱۳- نمایش هندسی معادلات درجه اول - قضیه -
 مکان تقاطع واقعه در سطح دو محور قائم که مختصات آنها در
 معادله دو مجهولی درجه اول $ax + by + c = 0$ صدق نماید
 خطی است مستقیم

اثبات - در معادله فوق بزودتی آنکه a یا b یا c مساوی یا
 مخالف صفر باشند حالات مختلف میتوان تشخیص داد ازین قرار :

حالت اول - فرض میکنیم فقط $a = 0$ باشد در این حالت معادله



$-\frac{c}{b}$ اختیار نموده از این نقطه

خط D_1 را موازی محور $x'x$ رسم کنیم این خط مکان تقاطعی خواهد بود که مختصات
 آنها در معادله (۱) صدق نمایند زیرا بهولت ملاحظه میشود که اولاً جمیع نقاط

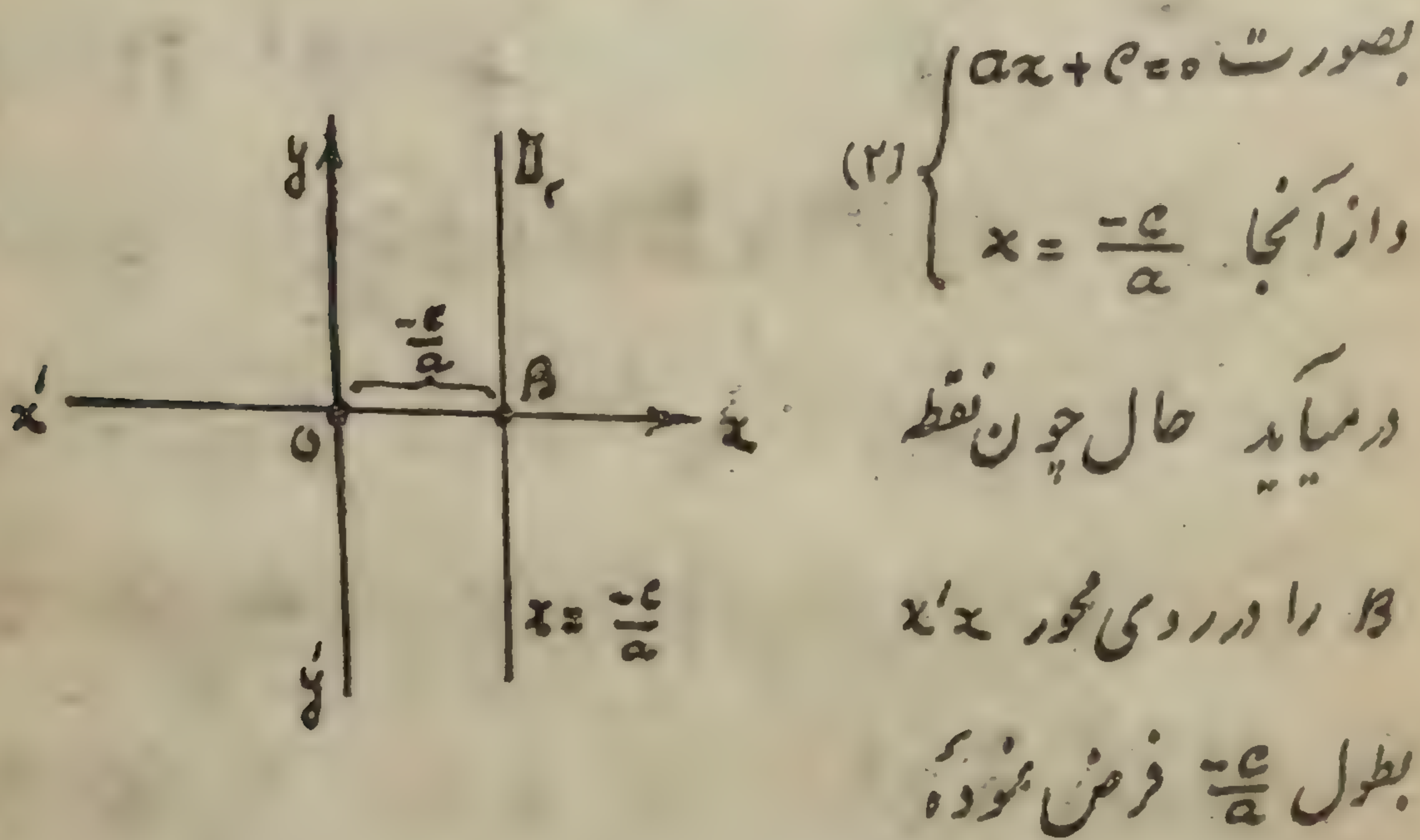
که مختصات آنها در معادله (۱) صدق نمایند در روی این خط واقع بوده و ثانیاً

مختصات جمیع نقاط این خط در معادله (۱) صدق نمایند

حالت مخصوص - چون در رابطه (۱) فرض کنیم $c = 0$ باشد معادله

بصورت $y = 0$ درمیآید و در این صورت مکان مطلوب محور $x'x$ خواهد بود

حالت دوم - فرض میکنیم فقط $c \neq 0$ باشد در این حالت معادله



از این نقطه خط D_r را موازی محور $y'y$ رسم کنیم این خط مکان نقاطی میباشد

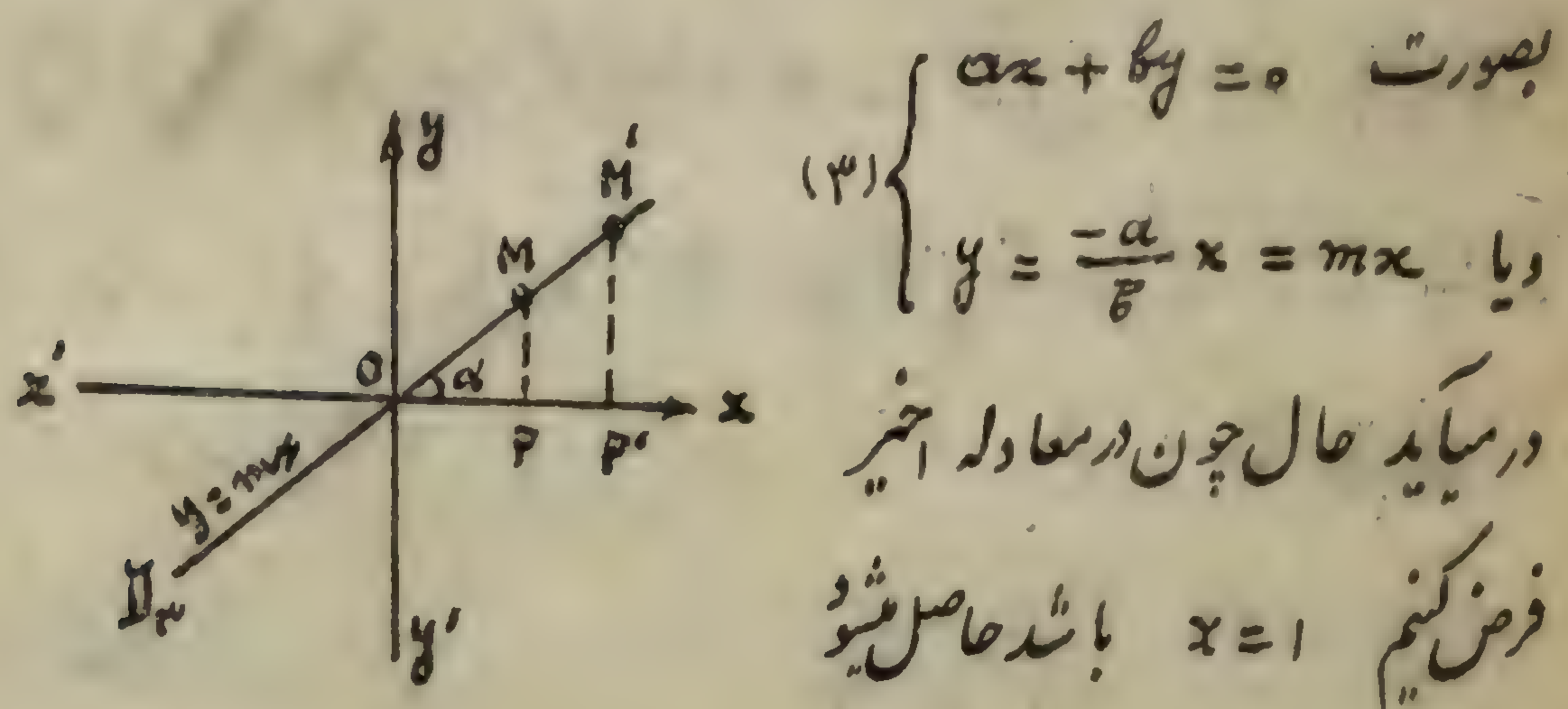
که مختصات آنها در معادله (۲) صدق نمایند چه به سبب سهولت دیده میشود که اولاً

جمیع نقاطی که مختصات آنها در معادله (۲) صدق نمایند در روی این خط

واقع بوده و ثانیاً مختصات جمیع نقاط این خط در معادله (۲) صدق میکند

حالت مخصوص - چون در معادله (۲) فرض کنیم $c = 0$ باشد

معادله بصورت $x=0$ درمیآید و در این صورت مکان محور $y'y'$ می باشد
حالت سوم - فرض میکنیم فقط $e=0$ باشد در این حالت معادله



$y = m$ و چون نقطه $M (\overline{OP}=1, \overline{PM}=m)$ را در سطح دو محور قائم

اختیار نموده این نقطه را بمبدأ O که مختصات آن نیز در رابطه (۳) صدق

نماید بجهت مستقیم Δ وصل کنیم این خط مکان مطلوب میباشد زیرا :

اولاً هرگاه نقطه مانند $M' (x', y')$ را فرض کنیم بطریقی که مختصات آن

در رابطه (۳) صدق نماید یعنی $y' = mx'$ باشد این نقطه در روی

خط Δ واقع میگردد چه اگر فرض کنیم $\overline{OP'} = x'$ و $\overline{P'M'} = y'$ باشد

بنابراین $\frac{\overline{P'M'}}{\overline{OP'}} = \frac{y'}{x'} = m$ میباشد و از طرفی $\frac{\overline{PM}}{\overline{OP}} = \frac{m}{1} = m$

و بالتجربه $\frac{\overline{PM}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{P'M'}}{\overline{OP'}}$ خواهد بود بطوریکه دو مثلث OPM و $OP'M'$

در زوایای P و P' قائمه و مساوی بوده و اضلاع طرفین زوایای مساوی

آنها تناسب میباشند بنابراین دو مثلث مشابه و زاویه $\widehat{MOP} = \widehat{M'OP'}$ میگرد و بطوریکه نقطه M' باید بر خط Δ و یا بر قرینه آن نسبت محور x' واقع گردد ولی چون قطع نظر از قدر مطلق اندازه جبری نسبتهای فوق نیز مساوی است لذا نقطه M' باید بر استداد خط Δ واقع شده و نمیتواند بر قرینه این خط واقع گردد

ثانیاً هر نقطه مانند $M'(x', y')$ در روی خط Δ فرض کنیم مختصات

آن در معادله (۳) صدق نمایند چه از تشابه دو مثلث OPM و $OP'M'$

$$\text{حاصل میشود} \quad \frac{P'M'}{OP'} = \frac{PM}{OP} \quad \text{و یا} \quad \frac{y'}{x'} = \frac{m}{1}$$

$$\text{و از آنجا} \quad y' = mx'$$

ضریب زاویه خط $y = mx$ - بطوریکه ملاحظه میشود خط

$y = mx$ خط مستقیمی است که بر مبدأ مرور مینماید و بهولت دیده میشود

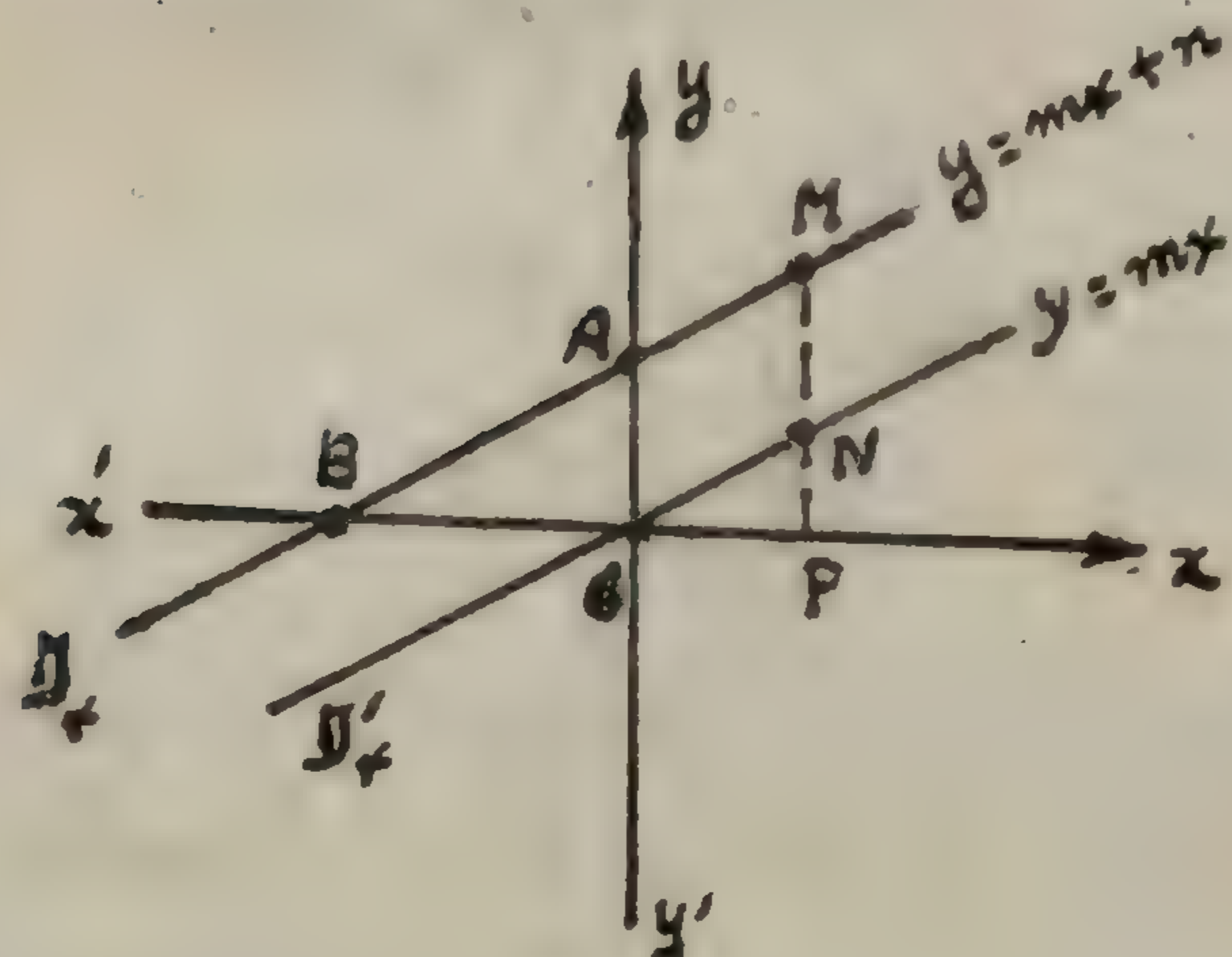
که امتداد این خط بستگی بمقدار m و یا ضریب x دارد چه اگر زاویه این

خط را با جهت مثبت محور x α فرض کنیم حاصل شود $\frac{y}{x} = m = \text{tg } \alpha$

بطوریکه زاویه α که امتداد خط را مشخص نماید بر حسب m تغییر میکند

بهین تناسب است که m را ضریب زاویه خط مینامند

حالت چهارم - فرض میکنیم a و b و c ، هیچک مساوی صفر نباشند در این صورت چون معادله را نسبت به y حل کنیم حاصل میشود:

$$(۴) \begin{cases} y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b} \\ y = mx + n \end{cases} \text{ و یا } y = mx$$


حال چون خط $y = mx$ را که بر مبدأ O مرور میکند رسم نموده و از نقطه O

در روی محور $y'y$ قطعه OA را مساوی n جدا کنیم و از نقطه A خط Δ_4 را بموازات آن رسم کنیم این خط مکان نقاطی میباشد که مختصات آنها در معادله (۴) صدق نمایند زیرا:

اولاً اگر نقطه مانند $M(x', y')$ فرض کنیم بطریقی که مختصات آن در معادله (۴) صدق نمایند یعنی $y' = mx' + n$ باشد این نقطه در روی خط Δ_4 واقع میگردد چه اگر نقطه P را در روی $x'x$ بطول $OP = x'$ اختیار نموده از این نقطه عمودی بر $x'x$ احراز کنیم نقطه تقاطع این خط با خط Δ_4 نقطه M میباشد زیرا $y' = mx' + n = PM = PN + NM$

خواهد بود .

ثانیاً هر نقطه مانند $M(x', y')$ در روی خط Π اختیار کنیم مختصات آن در معادله (۴) صدق نماید زیرا چون از M عمودی بر محور x اخراج کنیم

$$PM' = y' = PN + NM = mx' + n \quad \text{میباشد}$$

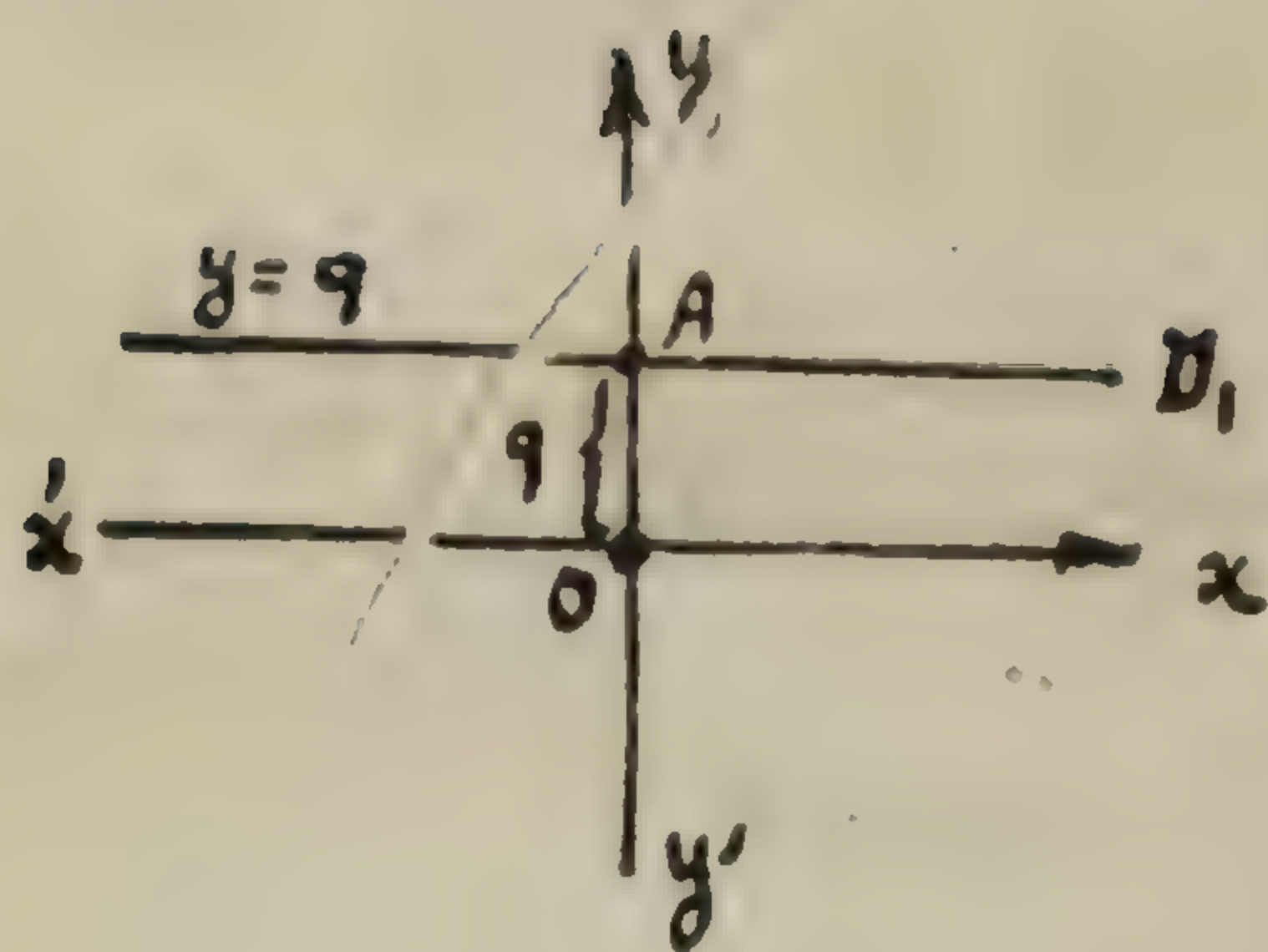
طول و عرض از مبدأ خط — خط Π دو محور را در نقاط A و B قطع نماید قطعه OB را طول از مبدأ و قطعه OA را عرض از مبدأ مینامند از تقرار عرض از مبدأ خط عرض نقطه از خط است بطول $x=0$ و طول از مبدأ آن طول نقطه از خط است بعرض $y=0$ بطوریکه برای بدست آوردن طول و عرض از مبدأ خطی کافیت که x و y را در معادله خط مساوی صفر قرار دهیم مثلاً عرض از مبدأ خط $y = mx + n$ عبارتست از n و طول از مبدأ آن عبارتست از $-\frac{n}{m}$

۱۴- قضیه عکس — تغییر جبری خطوط مستقیم — هر خط مستقیمی را میتوان بیک معادله درجه اول نمود

اثبات — خط مستقیم ممکن است با یکی از دو محور موازی بوده و یا آنرا در یک یا دو نقطه قطع نماید بنا بر این بر حسب اوضاع مختلفه خط حالات ذیل را

می‌توان تشخیص داد

حالت اول - فرض میکنیم



خط D_1 موازی محور $x'x$ بود

و محور $y'y$ را در نقطه A برش

$OA = 9$ قطع نموده باشد

در این صورت معادله $y = 9$ معادله خط D_1 خواهد بود چه بسبب آنست که

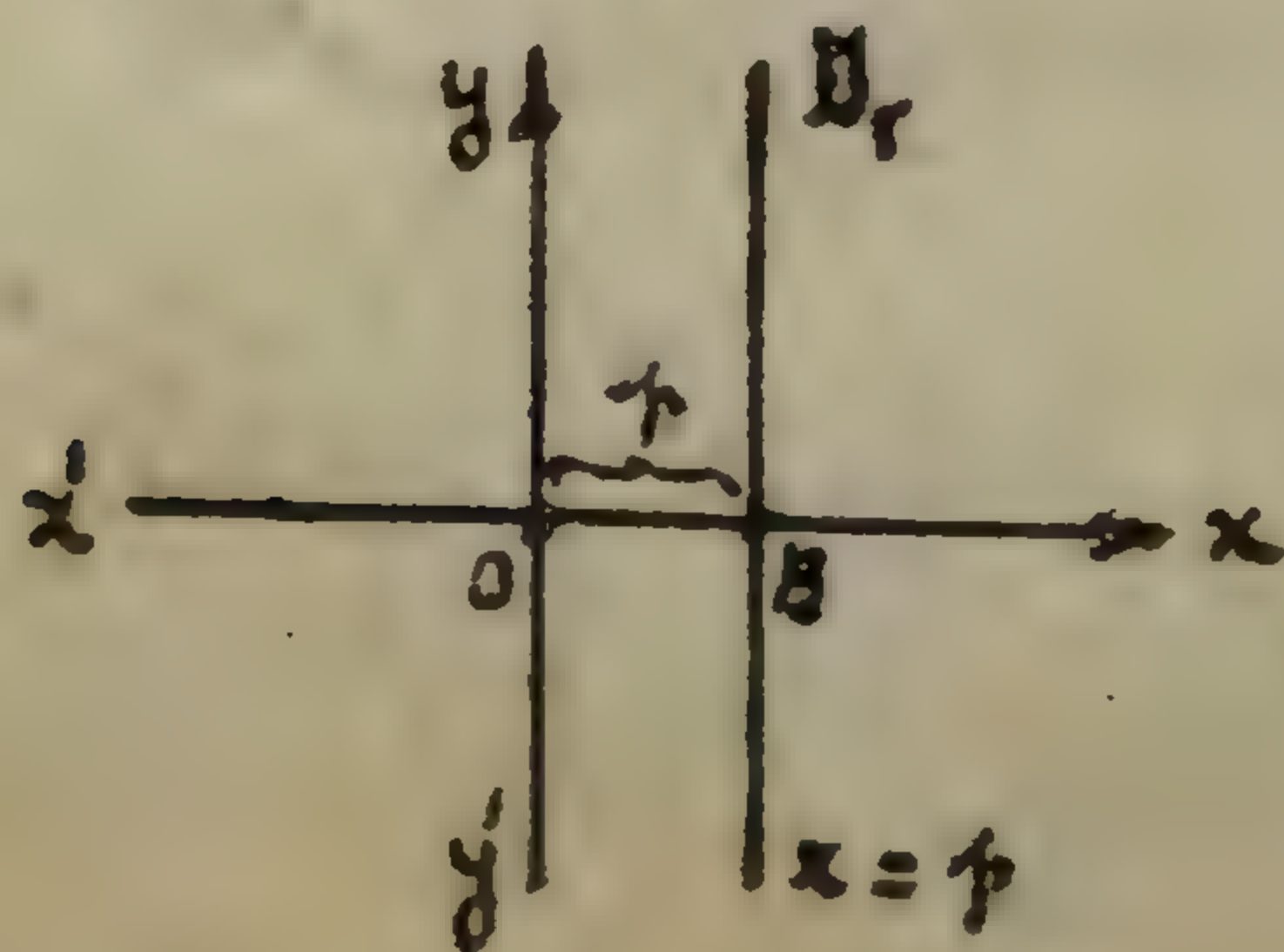
که مختصات جمیع نقاط این خط در معادله $y = 9$ صدق میکند و بالعکس هر

نقطه که مختصات آن در این معادله صدق کند در روی این خط واقع میگردد

حالت مخصوص - در صورتیکه نقطه A با مبدأ O ممتد باشد خط بر محور

$x'x$ منطبق میگردد بطوریکه معادله محور $x'x$ عبارتست از $y = 0$

حالت دوم - فرض میکنیم خط D_2 موازی محور $y'y$ بوده و محور



$x'x$ را در نقطه بطول

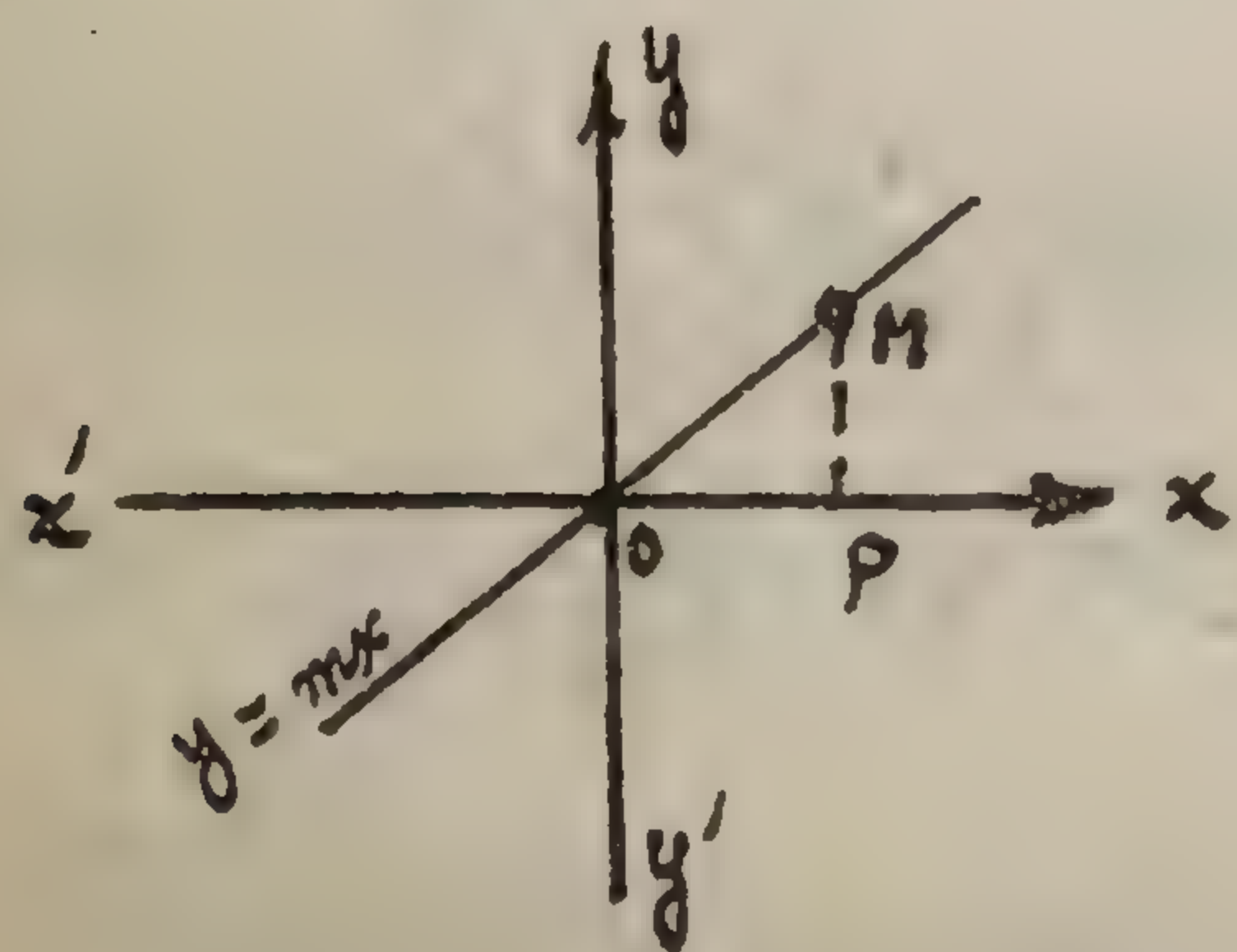
$OB = 7$ قطع نموده باشد

در این حالت معادله این خط

$x = 7$ خواهد بود چه

به سبب ملاحظه می شود که مختصات تمام نقاط این خط در معادله $x = p$ صدق نمود
و بالعکس هر نقطه که مختصات آن در معادله $x = p$ صدق کند در روی این خط
واقع می باشد

حالت خاص - در حالتیکه نقطه B با مبدأ O منطبق باشد خط بر محور
 y منطبق میگردد و بطوریکه معادله محور $y'y$ عبارت میگردد از $x = 0$
حالت سوم - فرض میکنیم خط OM بر مبدأ O مرور نماید در این صورت



چون نقطه غیر مشخص $M(x, y)$
را در روی آن فرض نموده MP را
بر $x'x$ عمود کنیم از مثلث OPM

حاصل میشود $\frac{PM}{OP} = \frac{y}{x} = \tan \alpha = \text{ctg} = m$ و از اینجا

$y = mx$ بطوریکه مختصات هر یک از نقاط خط OM در معادله $y = mx$

صدق نمایند و همچنین بطریق مشابه با آنچه در حالت سوم غره ۱۳ بیان نمودیم میتوان

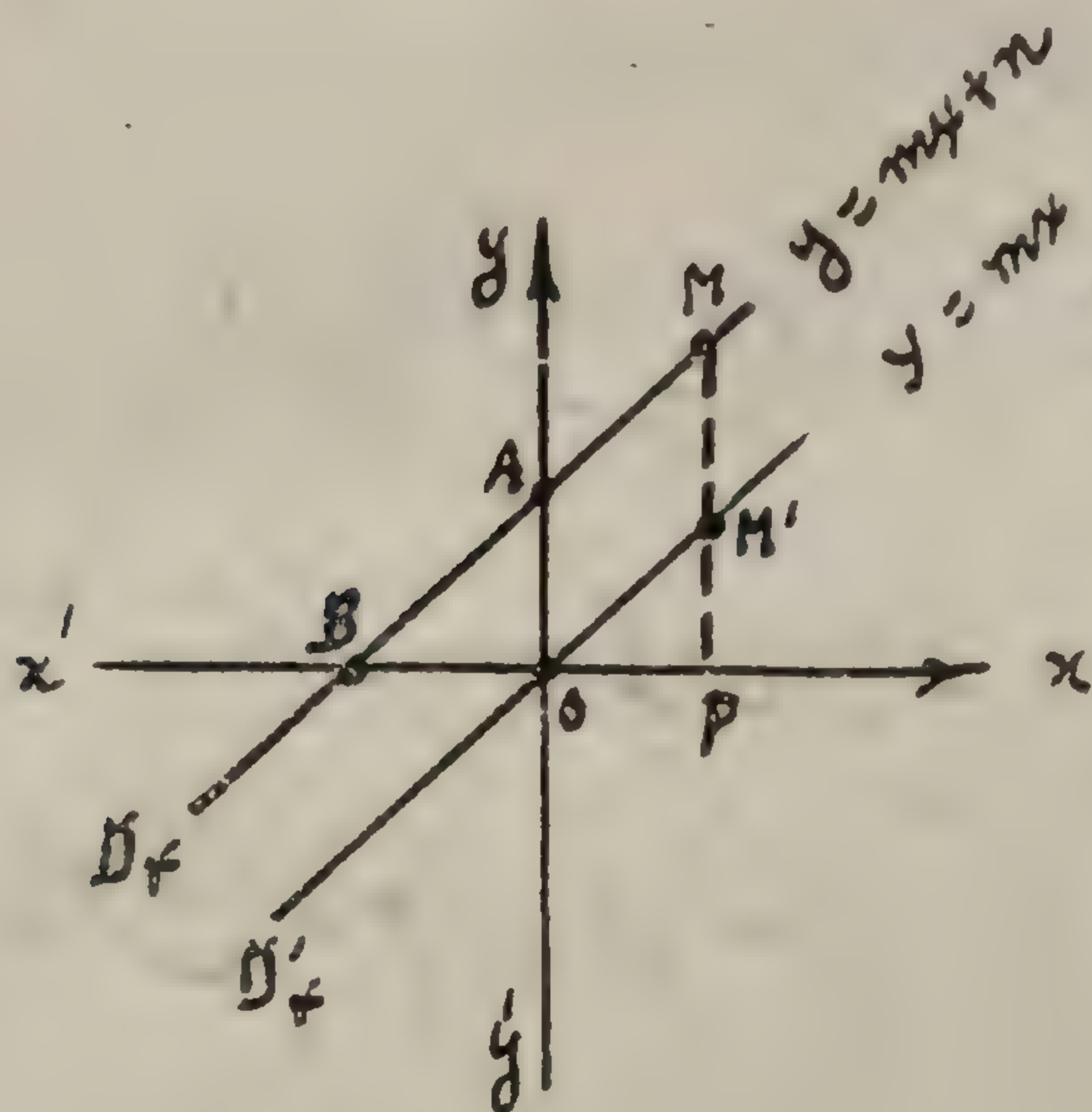
تحقیق نمود که هر نقطه که مختصات آن در رابطه $y = mx$ صدق نماید

در روی این خط واقع میگردد و بطوریکه معادله این خط $y = mx$

می باشد

حالت چهارم - فرض کنیم خط D_p دو محور را در نقاط A و B قطع

نموده باشد در این صورت



چون از مبدأ O خط D_p

را بموازات آن رسم کنیم

بر وفق آنچه میدانیم معادله

این خط بصورت $y = mx$

میباشد و چون نقطه غیر مشخص مانند $M(x, y)$ را در روی خط D_p اختیار

نموده از آن عمودی بر $x'x$ استخراج کنیم تا خط D_p را در نقطه N قطع

کند دو نقطه M و N متناظر یک طول بدست میآید ولی چون مسواریه

$\overline{PM} = \overline{PN} + \overline{NM}$ میباشد بنا بر این اگر طول ثابت $\overline{NM} = \overline{OA}$

را که عرض از مبدأ خط D_p است مساوی n فرض کنیم در رابطه فوق حاصل

میشود $y = mx + n$ بطوریکه معادله خط D_p عبارت میگردد از

$$y = mx + n$$

ترسیم خط

۱۵- برای ترسیم خط $ax + by + c = 0$ بر ترتیب ذیل عمل میکنیم

۱- فرض میکنیم ضریب x مساوی صفر باشد مثلاً مقصود رسم خط $3y - 6 = 0$ باشد در این صورت چون معادله را نسبت به y حل کنیم حاصل میشود $y = \frac{6}{3} = 2$ حال از مبدأ O در روی محور $y'y'$ طول OA را مساوی ۲ واحد مقیاس

جدا نموده از این نقطه خط D_1 را موازی محور $x'x$ رسم مینماییم

۲- فرض میکنیم ضریب y مساوی صفر باشد مثلاً مقصود رسم خط $2x + 3 = 0$ باشد در این صورت چون معادله را نسبت به x حل کنیم حاصل میشود $x = -\frac{3}{2}$

حال از مبدأ O در روی

محور $x'x$ طول OB

را مساوی $-\frac{3}{2}$ جدا نموده

از نقطه B خط D_2 را موازی

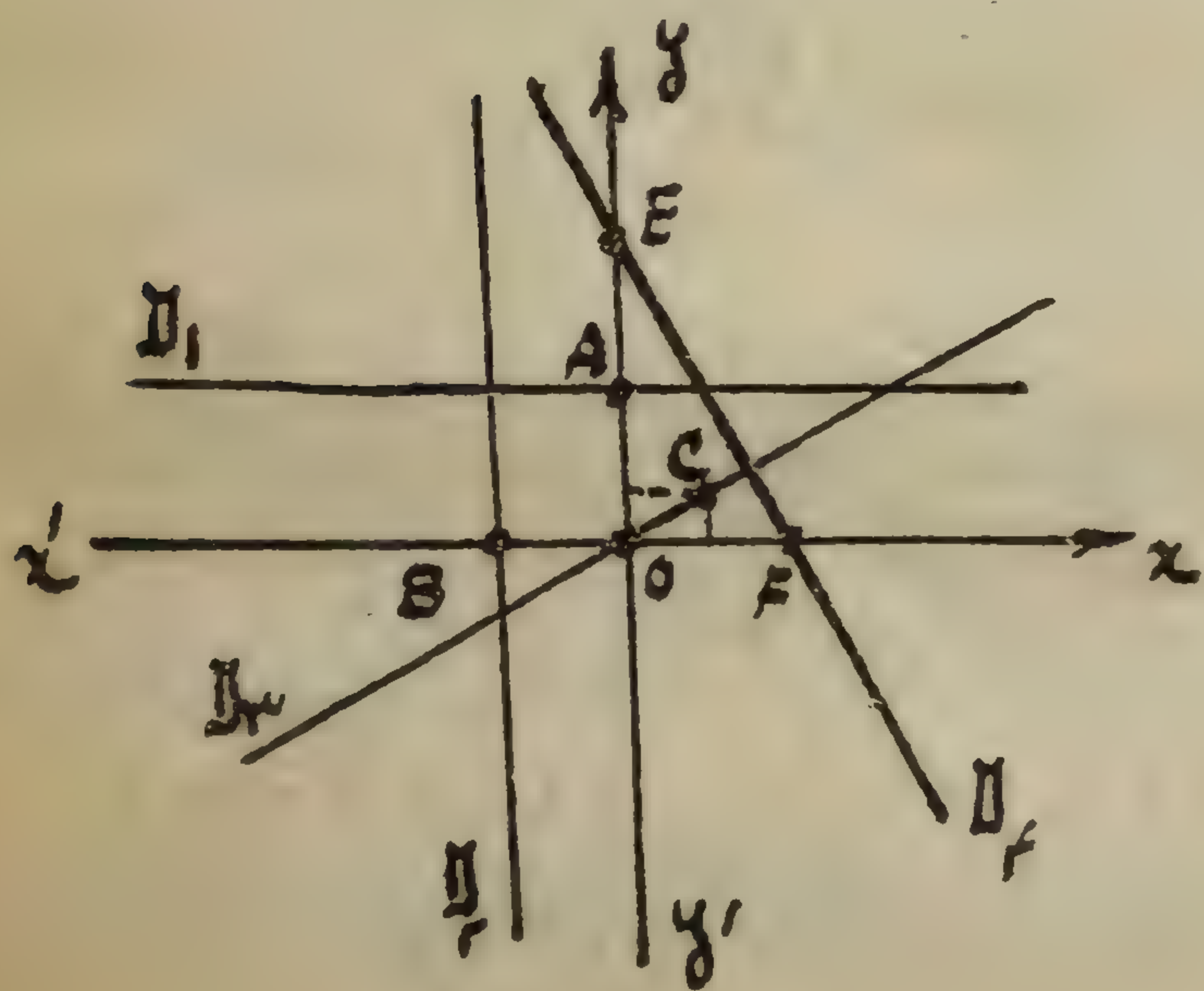
محور $y'y'$ رسم مینماییم

۳- فرض میکنیم جمله معلوم

مساوی صفر باشد مثلاً مقصود رسم خط $2x - 3y = 0$ باشد در این صورت

بر روی آنچه میدانیم خط فوق بر مبدأ O و در مسیماید بنا بر این تشخیص یک نقطه دیگر

کفایت میکند برای این کار در معادله فوق x را مساوی ۱ فرض میکنیم



تا حاصل شود $y = \frac{1}{2}$ و چون نقطه $(\frac{1}{2}, 1)$ را تعیین نموده بمبدأ
 و وصل کنیم خط مطلوب به Δ رسم میشود

۴- فرض میکنیم هیچیک از ضرایب صفر نباشد مثلاً مقصود رسم خط

$2x + y - 4 = 0$ باشد در این حالت برای سهولت اغلب نقاط تقاطع

خط را با دو محور تعیین نمایند برای این کار در معادله مفروض x را مساوی

صفر فرض میکنیم تا حاصل شود $y = 4$ و y را مساوی صفر فرض میکنیم تا حاصل شود $x = 2$ و چون

نقاط E و F را با شرایط فوق تعیین نموده بیکدیگر وصل کنیم خط مطلوب

به دست میآید

۱۶- رسم خطی که یک نقطه آن معلوم بوده و به علاوه

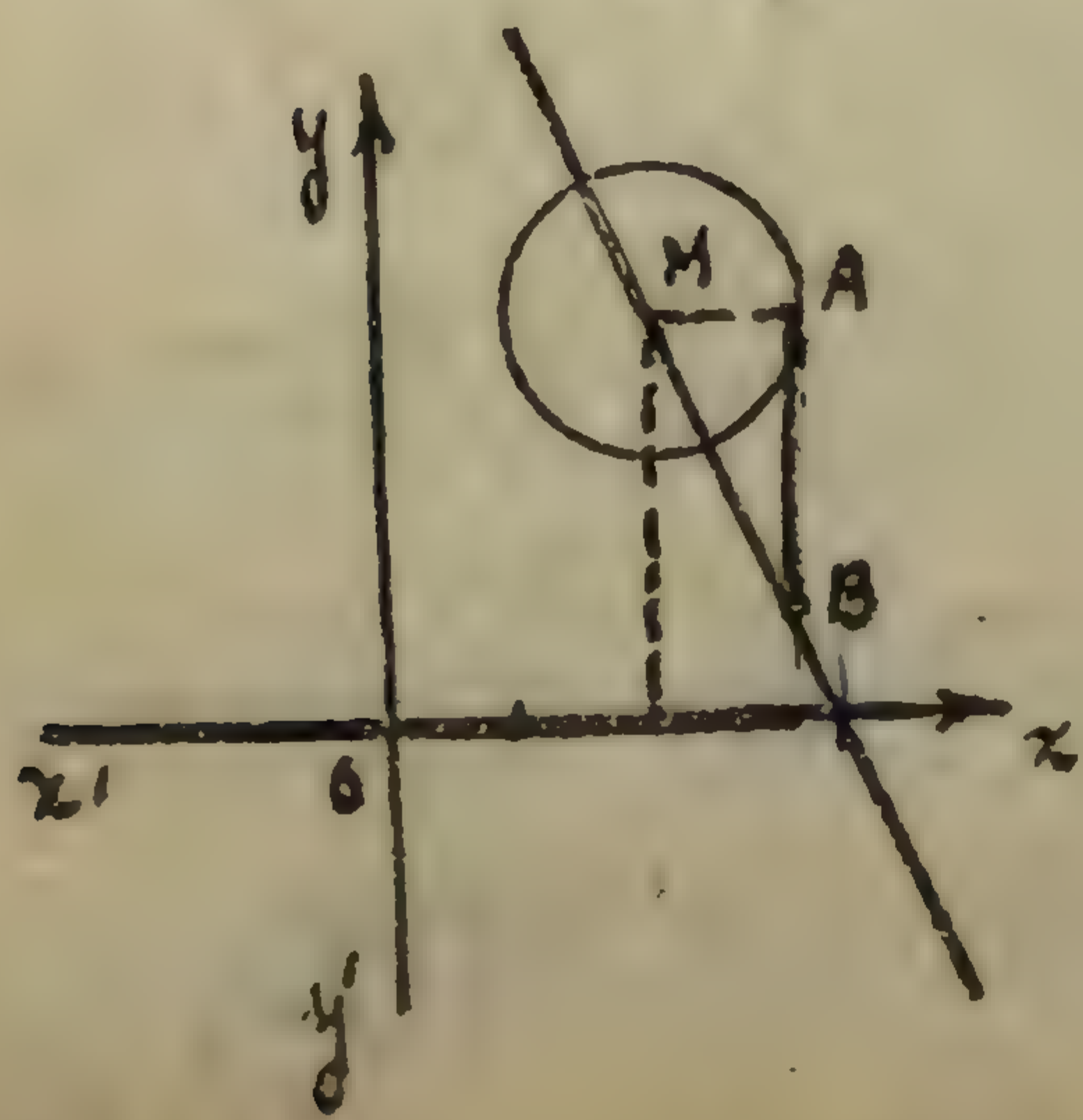
ضریب زاویه آن نیز در دست باشد

فرض میکنیم مقصود رسم خطی باشد که بر

$M(2, 3)$ با ضریب زاویه ۲-

مرور نماید ابتدا نقطه M را تعیین نموده

و برای شش نمودن امتداد خط مرکز



M و شعاع واحد دایره رسم میکنیم و بعد از نقطه A منتهی الیه شعاع MA که

موازی و متحد الجمله با $x'x$ اختیار میشود محوری موازی و متحد الجمله با $y'y$
 رسم نموده از مبدأ A در روی آن طول AB را مساوی ۲ - نقل میکنیم تا نقطه
 B بدست آید در این صورت خط MB خط مطلوب میباشد چه بر نقطه M مرو
 نموده و بعدا ده ضریب زاویه آن مساوی ۲ - میباشد

۱۷ - صورت کلی خطوط مار بر نقطه $M(x, y)$ - صحت
 که بر یک نقطه بینهایت خط مستقیم با امتداد های مختلف مرور نماید حال برای
 بدست آوردن صورت کلی معادله خطوط فوق فرض میکنیم معادله خط بصورت
 $y = mx + n$ (۱) باشد و چون این خط بر نقطه مفروض M مرور نماید

بنابر این لازم است $y' = mx' + n$ (۲) باشد
 حال چون در معادله (۱) و (۲) مقدار معلوم n را حذف میکنیم حاصل میشود
 $y - y' = m(x - x')$ که در آن با تغییر ضریب زاویه m خطوط
 مختلفه مار بر نقطه M بدست میآید

مثال ۱ - مطلوبست صورت کلی خطوط مار بر نقطه $M(۲-۳)$
 بروی دستور فوق صورت کلی خطوط مار بر نقطه M عبارتست از :

$$y + ۳ = m(x - ۲)$$

مثال ۲ - مطلوبست معادله خط مار بر نقطه $M (۱ و ۲ -)$ که با جبت

مثبت محور $x'x$ زاویه ۴۵° تشکیل دهد

صورت کلی خطوط مار بر نقطه M عبارتست از $y - ۲ = m(x + ۱)$ که چون در آن بجای m مقدارش $\tan ۴۵^\circ = ۱$ را قرار داده خلاصه کنیم

حاصل میشود $y = x + ۳$ که معادله خط مطلوب میباشد

۱۸ - از دستور $y - y' = m(x - x')$ چون m را استخراج

کنیم حاصل میشود $m = \frac{y - y'}{x - x'}$ یعنی :

ضریب زاویه هر خط عبارتست از نسبت تفاضل عرض دو نقطه

غیر مشخص آن تفاضل طول آن دو نقطه

از روی دستور فوق همواره میتوان تحقیق نمود که آیا سه نقطه A و B و C

بمختصات معلوم در روی یک خط مستقیم واقعند یا خیر با این طریق که ضریب زاویه

خط AB را از روی مختصات A و B و ضریب زاویه خط BC را از روی

مختصات B و C حساب میکنیم در صورتیکه مساوی شد سه نقطه بر یک خط مستقیمند

والا خیر

۱۹ - معادله خط مار بر دو نقطه $M(x', y')$ و $N(x'', y'')$

نقطه غیر مشخص $P(x, y)$ را در روی خط MN اختیار میکنیم در این صورت

چون سه نقطه M و N و P بر یک استقامتند لذا ضرب زاویه MP

با ضرب زاویه MN مساوی خواهند بود بنابراین لازم است :

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} (x - x') \quad \text{و یا} \quad \frac{y - y'}{x - x'} = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}$$

بطوریکه ما بین مختصات نقطه غیر مشخص P از خط MN همواره رابطه فوق برقرار

است بنابراین این رابطه معادله خط MN خواهد بود

معادله فوق دارای ضرب زاویه ثابت $\frac{y'' - y'}{x'' - x'}$ بوده و عرض از مبدأ

آن نیز ثابت و لذا خط منحصراً مشخص میگردد

حالت مخصوص - بروقی رابطه فوق هرگاه فرض کنیم طول و عرض

از مبدأ خطی ترتیب p و q معلوم باشد معادله خط بصورت ذیل خواهد بود

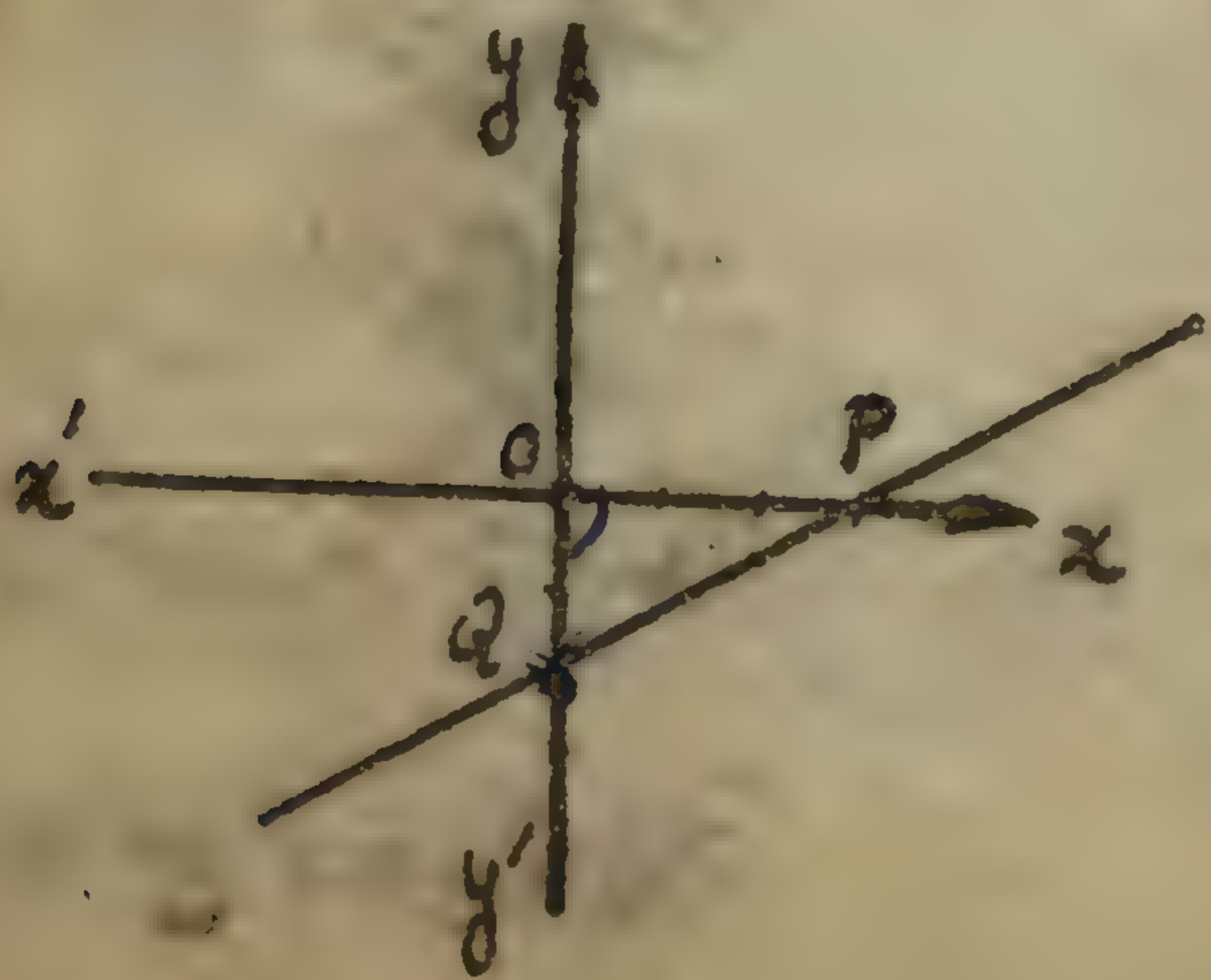
$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

ازینقرار برای رسم خطی که معادله آن

بصورت اخیر مثلاً بصورت $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$

باشد کافیت در روی محور x

طول OP را مساوی ۳ و در روی محور



y' طول $-2 = \overline{OQ}$ را جدا نموده خط PQ را وصل نمایم

مثال ۱ - مطلوبست معادله خط ماربر دو نقطه $A(2, 3)$ و $B(0, 1)$

چون در دستور سابق بجای x' و y' و x و y مقادیر عددی آنها را قرار

دهیم حاصل میشود $(x-2) = \frac{1+3}{0-2} (y-3)$ که پس از اختصار بصورت

ذیل درمیآید $y = -2x + 1$

مثال ۲ - مطلوبست معادله خطی که طول از مبدأ آن ۱ - و عرض از

مبدأ آن ۳ باشد

بر وفق دستور $\frac{x}{1} + \frac{y}{3} = 1$ معادله خط مطلوب بصورت

$\frac{y}{3} + 1 = x$ یا $3x - y + 3 = 0$ میباشد

۲۰ - زاویه دو خط - دو خط D و D' را که ضریب زاویه اولی m

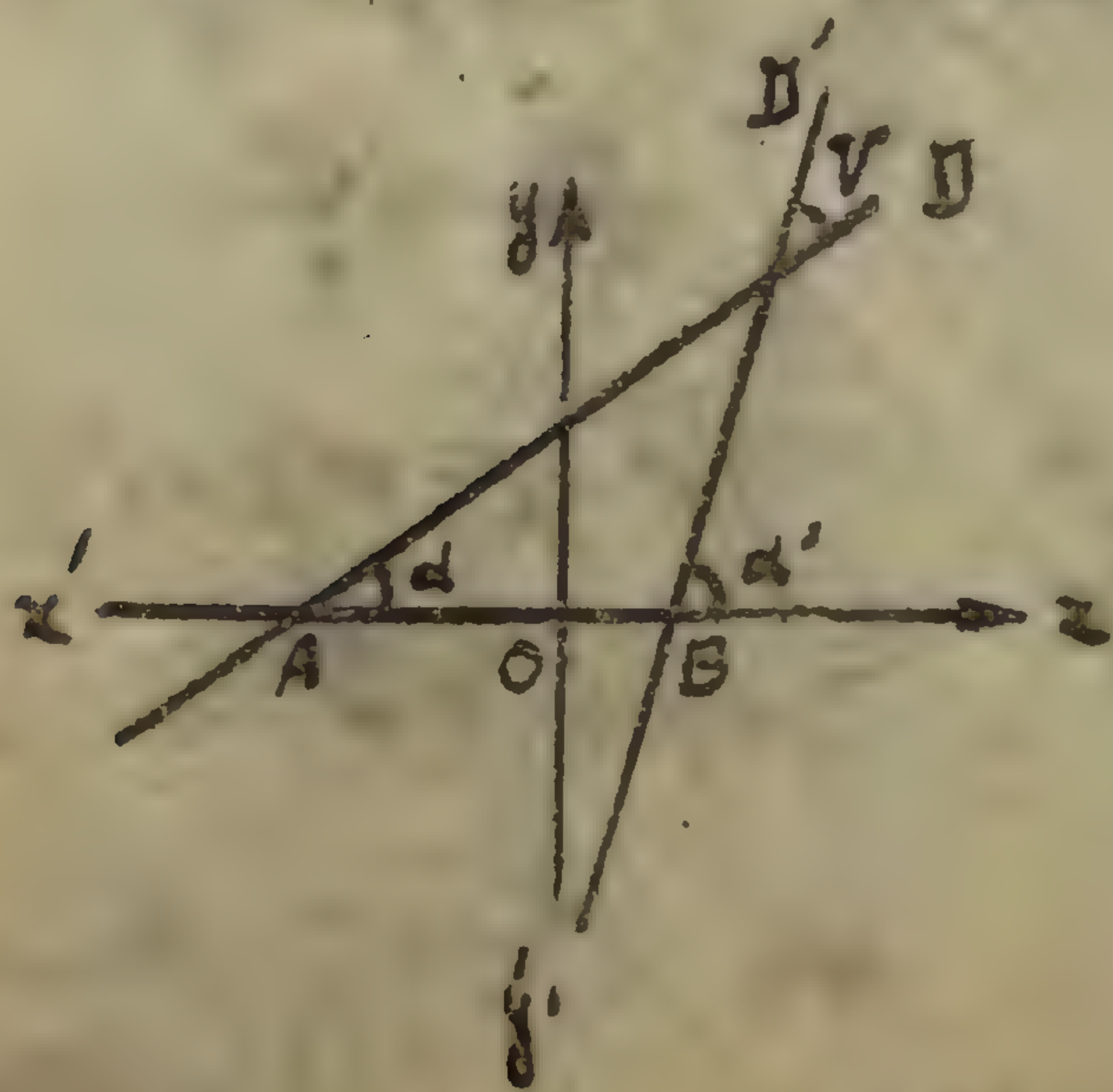
و ضریب زاویه دومی m' میباشد

اختیار نموده و فرض میکنیم اولی

محور $x'x$ را در نقطه A و دومی

در نقطه B قطع نموده باشد هرگاه

$\widehat{DAx} = \alpha$ و $\widehat{D'A'x} = \alpha'$



و زاویه $\widehat{(\alpha, \alpha')} = \gamma$ باشد حاصل میشود $\gamma = \alpha' - \alpha$ و بنا بر این

$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} (\alpha' - \alpha)$ که پس از بسط طرف دوم حاصل میشود

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \alpha' - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg} \alpha}$$

و چون $\operatorname{tg} \alpha = m$ و $\operatorname{tg} \alpha' = m'$ میباشد لذا نتیجه میشود $\operatorname{tg} \gamma = \frac{m' - m}{1 + m' m}$

از رابطه فوق بفرض معلوم بودن m و m' و بنا بر این γ بدست میآید

تبصره - چنانکه ملاحظه میشود با تبدیل m به m' که فوق تغییر علامت میدهد

در این حالت زاویه مکمل γ که زاویه دیگر دو خط است بدست میآید.

مثال - مطلوب است محاسبه زاویه دو خط $9x + 3y + 5 = 0$ و $4x - 2y - 1 = 0$

چون هر یک از دو معادله را نسبت به y حل کنیم حاصل میشود :

$$y = -3x + \frac{5}{3} \quad \text{و} \quad y = 2x - \frac{1}{2}$$

حال چون در دستور فوق بجای m و m' مقادیر آنها ۲ و ۳ - را قرار دهیم

حاصل میشود $\operatorname{tg} \gamma = 1$ و از آنجا $\gamma = 45^\circ$

۲ - شرط لازم و کافی برای آنکه دو خط موازی یا بر یکدیگر

عمود باشند - از دستور $\operatorname{tg} \gamma = \frac{m' - m}{1 + m' m}$

نتایج ذیل حاصل میشود

۱- شرط لازم و کافی برای آنکه دو خط موازی باشند آنست که ضریب زوای آنها مساوی باشد چه اولاً هرگاه دو خط موازی فرض کنیم $\gamma = 0$ و بنا بر این

$$\tan \gamma = 0 \quad \text{ولذا} \quad m' = m \quad \text{میگردد ثانیاً هرگاه فرض کنیم}$$

$$m' = m \quad \text{باشد} \quad \tan \gamma = 0 \quad \text{ولذا} \quad \gamma = 0 \quad \text{و دو خط موازی میگردند}$$

۲- شرط لازم و کافی برای آنکه دو خط بر یکدیگر عمود باشند آنست که حاصل

ضرب ضریب زوای آنها مساوی ۱- باشد چه اولاً هرگاه دو خط بر یکدیگر

$$\text{عمود باشند} \quad \gamma = \frac{\pi}{2} \quad \text{و بنا بر این} \quad \tan \gamma = \infty \quad \text{ولذا}$$

$$m'm = -1 \quad \text{میگردد ثانیاً هرگاه فرض کنیم} \quad m'm = -1 \quad \text{باشد}$$

$$\tan \gamma = \infty \quad \text{ولذا} \quad \gamma = \frac{\pi}{2} \quad \text{و دو خط بر یکدیگر عمود میگردند}$$

مسئله ۱- مطلوبست معادله خطی که از نقطه $M(-2, 1)$ موازی

$$\text{خط} \quad y = 3x - 2 \quad \text{رسم شود}$$

صورت کلی معادله خطوط متابر نقطه M عبارتست از $y - 1 = m(x + 2)$

و چون باید با خط مفروض موازی باشد بنا بر این لازم است $m = 3$ بوده و بنا بر این

$$\text{معادله خط مطلوب عبارت میگردد از} \quad y - 1 = 3(x + 2) \quad \text{و یا پس از}$$

$$\text{اختصار} \quad y = 3x + 7$$

مسئله ۲ - مطلوبست معادله خطی که از نقطه $M(۳-۴)$ بر خط
 $y = ۵ - ۲x$ عمود گردد

صورت کلی معادله خطوط ماز بر نقطه M عبارتست از $y + ۳ = m(x - ۴)$

و چون باید خط بر خط مفروض عمود باشد لذا ضریب زاویه آن $m = \frac{1}{۲}$

بوده و بنا بر این معادله خط مطلوب عبارت میگردد از $y + ۳ = \frac{1}{۲}(x - ۴)$

و یا پس از اختصار $y = \frac{1}{۲}x - ۵$

۲۲ - فصل مشترک خطوط - تغییر جواب دستگاه دو معادله

دو مجهولی و یا جواب یک معادله یک مجهولی - بطوریکه میدانیم

حل دستگاه دو معادله دو مجهولی $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ f_1(x, y) = 0 \end{cases}$ عبارت از تعیین دستگاهی

جواب x و y که در دو معادله مفروض صدق نمایند ولی چون هر یک از معادلات

فوق را همواره میتوان بیک خط مستقیم یا منحنی نمایش داد بنا بر این جواب دستگاه

مفروض عبارت میگردد از مختصات نقطه تقاطع دو خطی که نمایش میدهند معادلات

فوق میباشند بطوریکه همیشه بعد از نقاط تقاطع این دو خط دستگاه مفروض

دارای جواب میباشد

مثال ۱ - مطلوبست بحث در عده جوابهای دستگاه دو معادله دو مجهولی

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases} \quad \text{درجه اول}$$

چون هر یک از دو معادله را نسبت به x حل کنیم حاصل میشود :

$$\begin{cases} y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \\ y = -\frac{a'}{b'}x - \frac{c'}{b'} \end{cases}$$

که نمایش هندسی هر یک از آنها خطی است مستقیم حال بر حسب مقدار ضرایب آنها چند حالت میتوان تشخیص داد :

حالت اول - در حالتی که $-\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'}$ یا $ab' - ba' = 0$

باشد دو خط دارای ضریب زاویه مساوی بوده و بنابراین موازی یا منطبقند

حال اگر عرض از مبدأ آنها نیز مساوی یعنی $-\frac{c}{b} = -\frac{c'}{b'}$ و یا $bc' - cb' = 0$

باشد دو خط منطبق و بنابراین دو معادله مفروض متوافقی بوده و عده جوابها

دستگاه فوق بینهایت میباشد و اگر $bc' - cb' \neq 0$ باشد دو خط

موازی بوده و دستگاه مفروض جواب ندارد

حالت دوم - در حالتی که $-\frac{a}{b} \neq -\frac{a'}{b'}$ یا $ab' - ba' \neq 0$

باشد دو خط دارای ضریب زاویه مختلف بوده و لذا متقاطعند و چون بیش از یک نقطه تقاطع نمیتوانند دارا باشند لذا دستگاه مفروض در اینجا لت فقط دارای یک جواب خواهد بود

مثال ۲ - دایره $x^2 + y^2 = \frac{۳۶}{۵}$ و نقطه A در روی محور x' بطول ۳ + مفروض است مطلوبست معادله خط مماس از نقطه A بر دایره صورت کلی خطوط ما بر نقطه A عبارتست از $y = m(x - ۳)$ و چون باید این خط با دایره مماس باشد لذا دستگاه معادله دو مجهولی

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = \frac{۳۶}{۵} \\ y = m(x - ۳) \end{array} \right|$$

باید دارای ریشه مضاعف باشد حال اگر y را در دو معادله فوق حذف نموده معادله حاصل را بر حسب x مرتب کنیم حاصل میشود :

$$۵(۱ + m^2)x^2 - ۳۰m^2x + ۴۵m^2 - ۳۶ = ۰$$

که چون در آن Δ را مساوی صفر قرار دهیم حاصل میشود $۴۵(۴ - m^2) = ۰$

$$m = \pm ۲ \quad \text{و از اینجا}$$

بنابر این از نقطه مفروض A میتوان دو مماس بر دایره فوق رسم نمود که معادلات

آنها عبارتست از $y = 2x - 6$ و $y = -2x + 6$

همچنین اگر معادله یک مجهولی $f(x) = 0$ را اختیار نموده و فرض کنیم

$y = f(x)$ باشد چون منحنی نمایش آن را رسم کنیم طول نقاط تقاطع

این منحنی با محور $x'x$ نظیر جوابهای معادله $f(x) = 0$ میباشد زیرا

بازاء طول این نقاط $y = 0$ میباشد بطوریکه عبده نقاط تقاطع منحنی $y = f(x)$

با محور $x'x$ معادله $f(x) = 0$ دارای جواب میباشد

با این طریق نیز راهی برای حل و بحث بعضی معادلات بدست میآید که بعداً در ضمن

حل بعضی مسائل مورد استعمال آنرا خواهیم دید

مسائل

$$MH = \frac{ax' + by' + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

۱۱- مطلوبست رسم خطوط $y = m(x-1) + 1$ بازاء مقادیر ذیل $m = 0$

و $m = 1$ و $m = -3$

۱۲- مختصات رؤس مثلثی عبارتست از $A(2, 1)$ و $B(4, 3)$ و $C(-1, -2)$

مطلوبست اولاً رسم مثلث ثانیاً معادله اضلاع ثالثاً مختصات جدید رؤس و معادلات جدید اضلاع مثلث هرگاه دو محور را بموازات خود حرکت دهیم تا مبداء مختصات بر وسط AB واقع گردد

۱۳- نقطه $M(2, -3)$ و خط $3x - 2y = 4$ مفروضند مطلوبست

اولاً معادله خطی که از نقطه M موازی خط فوق رسم شود ثانیاً معادله خطی که از نقطه M عمود

بر خط فوق رسم شود ثالثاً معادله خطی که از نقطه M مرور نموده و با خط فوق زاویه 45° تشکیل دهد

۱۴- مطلوبست فاصله مبدأ O از خط $2x + y = 2$

۱۵- مطلوبست محاسبه مقدار a برای آنکه دو خط

$x - 2ay = 1$ و $ax - 2y = 2$ موازی باشند

۱۶- دو نقطه $A(2, -1)$ و $B(3, 0)$ و $C(a-1, 2a)$ مفروضند

مقدار a را بطریقی تعیین کنید که سه نقطه فوق بر یک استقامت واقع گردند

۱۷- سه خط :

$$y = 5x + 1 \quad 2y = 3x + m \quad 3y = 4x + m$$

مفروضند مقدار m را حساب کنید بطریقی که سه خط بر یک نقطه تقاطع نمایند

۱۸- مطلوبست محاسبه مقدار a بطریقی که دو خط

$$ax + (a-1)y - 2(a+2) = 0$$

$$3ax - (3a+1)y - (5a+4) = 0$$

اولاً موازی ثانیاً عمود ثالثاً متقاطع باشند

۱۹- مطلوبست شرایط لازم و کافی برای آنکه خطوط :

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

$$\frac{x}{p'} + \frac{y}{q'} = 1$$

$$\frac{x}{p+p'} + \frac{y}{q+q'} = 1$$

اولاً موازی ثانیاً متقاطع باشند

۲۰- ثابت کنید که سه میانه هر مثلث در یک نقطه تقاطع میکنند.

۲۱- ثابت کنید که مجموع عمودهای وارد از یک نقطه M داخل مثلث متساوی الساقین

ABC بر اضلاع همین مثلث سه برابریت ثابت

۲۲- معادلات اضلاع مثلثی عبارتست از

$$BC \quad 4x + 3y - 10 = 0$$

$$CA \quad 3x + 5y - 2 = 0$$

$$AB \quad x - 2y + 3 = 0$$

اولاً مطلوبت محاسبه مختصات رؤس مثلث ثانیاً پس از محاسبه مختصات رؤس معادلات

اضلاع را از روی آنها بدست آورید ثالثاً مختصات نقطه تقاطع سه میانه را حساب کنید

رابعاً دو خط موازی AB و AC مرسوم از C و BC در نقطه A' و دو خط موازی BC و

BA مرسوم از A و CA در نقطه B' و دو خط موازی CA و CB مرسوم از B و A

در نقطه C' یکدیگر را قطع میکنند تحقیق کنید که A' وسط $B'C'$ میباشد همچنین اگر به همین طریق

مثلث $A'B'C'$ را برای مثلث $A'B'C'$ تشکیل دهیم تحقیق کنید که نقطه A وسط $A'A'$

میشود خامساً مطلوبت محاسبه طول اضلاع مثلث

۲۳- ثابت کنید که هر یک از خطوط ذیل با زاویه جمع مقادیر m بر یک نقطه ثابت مرسوم

میشوند که مختصات آنرا حساب می کنید :

$$mx + 3y - 4m + 1 = 0$$

$$(m+1)x + (5-m)y + 1 = 0$$

۲۴ - ثابت کنید که منحنیات ذیل بازار جمع مقادیر a بر نقطه ثابتی مرور نمایند که مختصات آنرا حساب کنید

$$x(2m^2 + m^2 - m + 2) + y(-3m^2 + m^2 + m - 1) - am^2 + m - 2 = 0$$

$$y = 2x^2 - (a+1)x - a$$

$$y = \frac{ax + a}{x - 2}$$

۲۵ - ثابت کنید که منحنیات ذیل بازار جمع مقادیر پاراستر a همواره بر دو نقطه ثابت مرور می‌نمایند

که مختصات آنها را حساب می‌کنید $y = 2ax^2 - x - 2a - 1$

$$y = \frac{x + 4a}{ax + 1}$$

۲۶ - نقاط $A(1, 2)$ و $B(-3, 4)$ و خط D بمعادله $2y - 3x = 0$

مفروض است فرض میکنیم نقطه P یکی از نقاط خط D باشد خط PA محور $x'x$ را در نقطه

M و خط PB محور $y'y$ را در نقطه N قطع میکند اولاً ثابت کنید که خط LM

برگانه نقطه P خط D را طی کند بر نقطه ثابتی مانند N مرور نمایند ثانیاً تحقیق کنید که

نقاط A و B و N بر یک استقامت می‌ایستند

۲۷ - در روی محور $x'x$ نقاط a و a' بطول a و a' و در روی محور $y'y$ دو نقطه

B و B' بعرض b و b' مفروضند خطوط AB و $A'B'$ یکدیگر را عموماً در نقطه مانند C

قطع میکنند مطلوب است اولاً محاسبه مختصات C ثانیاً تحقیق کنید که اوساط قطعات

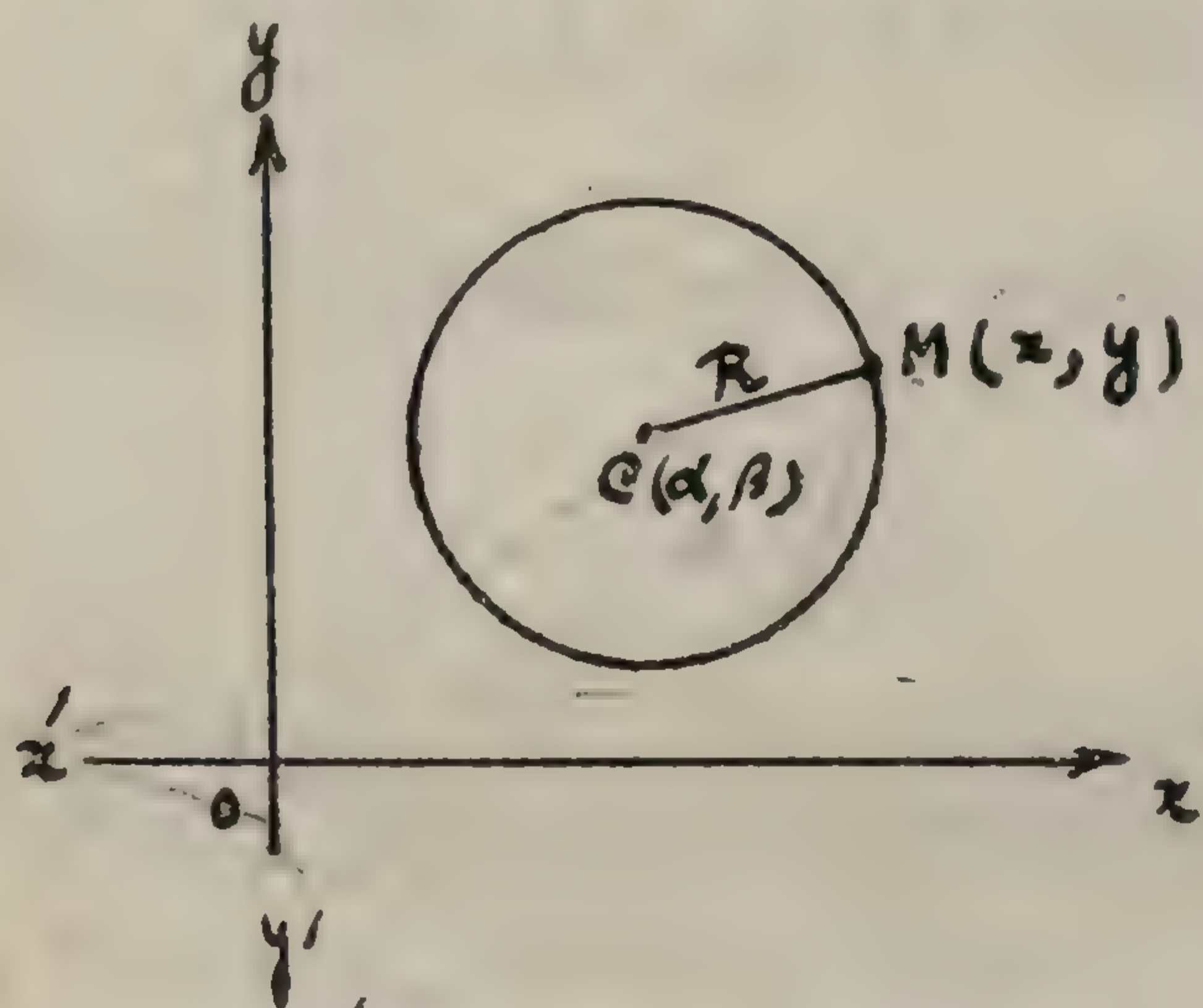
AB و $A'B'$ و OC بر یک استقامت واقع می‌ایستند

معادله بعضی منحنیات *

۲۳- معادله دایره - تعریف - دایره مکان نقاطی است در صفحه که

از نقطه ثابتی موسوم بر مرکز فاصله ثابت باشند که آنرا شعاع دایره مینامند

حال برای یافتن معادله دایره دو محور قائم $x'Ox$ و $y'Oy$ را اختیار



نموده فرض میکنیم نقطه $C(\alpha, \beta)$

مرکز دایره شعاع R باشد

و چون نقطه غیر مشخص $M(x, y)$

را در روی دایره فوق فرض نموده

فاصله CM را از روی مختصات نقاط C و M حساب کنیم

حاصل میشود :

$$(1) \quad CM^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0 \quad \text{و یا}$$

* چون در حل بعضی مسائل این کتاب دانستن معادله بعضی منحنیات از قبیل دایره

و بعضی دیگر لازم میباشد لذا طریقه یافتن معادله منحنیات مزبور را بیان مینمایم

ولی تدیس آنها اختیاریست

که معادله دایره ایست بشعاع هرگاه مختصات مرکز آن a و b باشد
 در حالتیکه مرکز مختصات را مرکز دایره فرض کنیم معادله دایره بصورت $x^2 + y^2 = r^2$
 درمیآید بطوریکه ملاحظه میشود معادله دایره معادله دو مجهولی درجه دومی است که
 در آن ضرب x^2 و y^2 مساوی ضرب xy مساوی صفر میباشد

بالعکس هر معادله درجه دوم $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$
 را میتوان بصورت معادله (۱) تبدیل نموده و بنا بر این معادله دایره دانست مشروط
 بر آنکه $a^2 + b^2 - c > 0$ باشد

زیرا میتوان نوشت:

$$x^2 + 2ax = (x + a)^2 - a^2$$

$$y^2 + 2by = (y + b)^2 - b^2$$

که چون آنها را جمع نموده و بر طرفین c را اضافه کنیم حاصل میشود:

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = (x + a)^2 + (y + b)^2 - (a^2 + b^2 - c) = 0$$

$$(x + a)^2 + (y + b)^2 = a^2 + b^2 - c \quad \text{و یا}$$

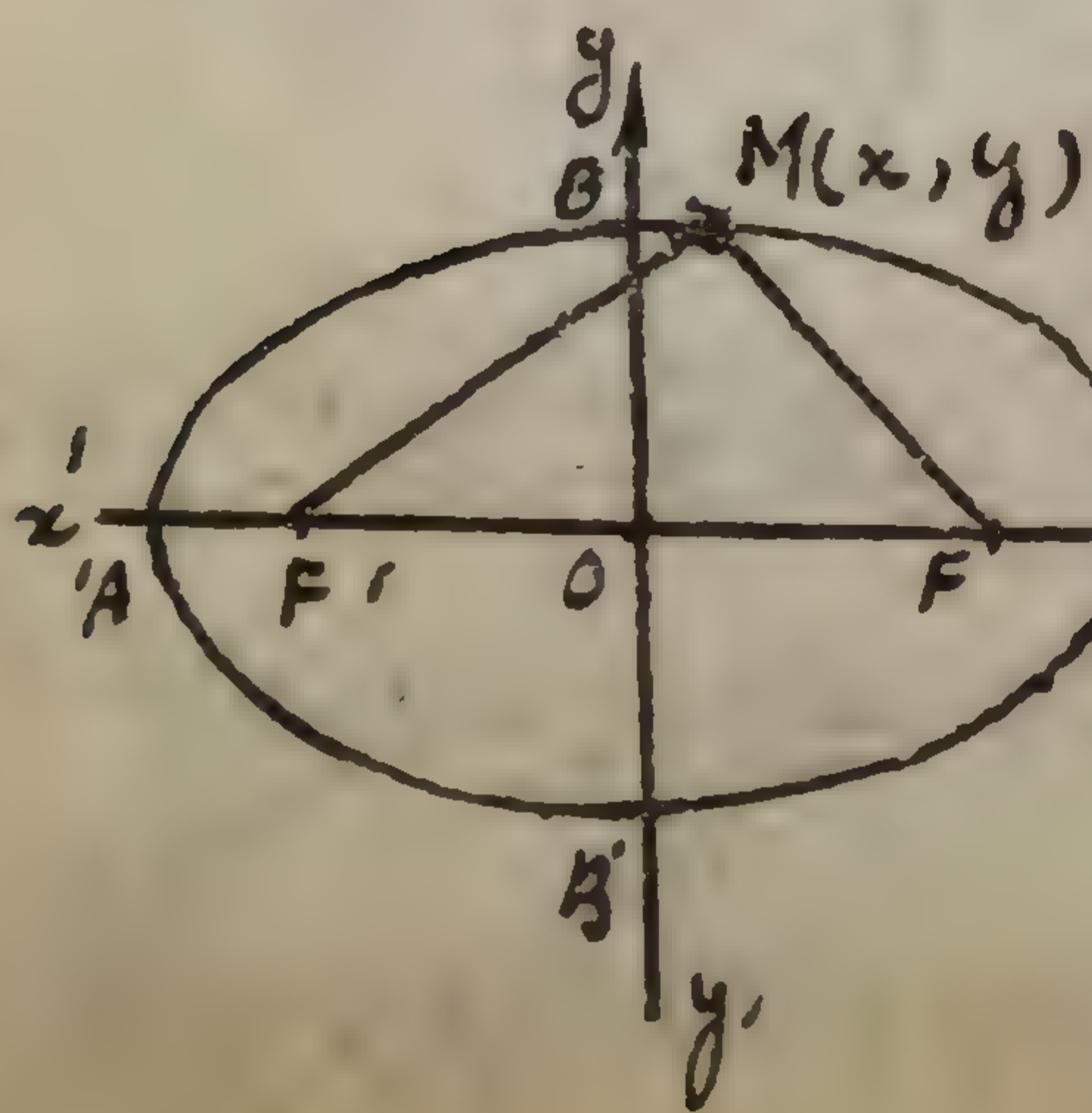
که معادله دایره ایست بشعاع $\sqrt{a^2 + b^2 - c}$ که مختصات مرکز آن
 $(-a, -b)$ باشد

واضح است شرط وجود دایره فوق آنست که $a^2 + b^2 - c$ مثبت و قابل جذر باشد

مثلاً معادله $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$ پس از تبدیل بصورت
 $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 25$ درمیآید که معادله دایره است بشعاع ۵ که
 مختصات مرکز آن $(-3, 2)$ میباشد

۲۴- معادله بیضی - تعریف - بیضی مکان نقاطی است از
 صفحه که مجموع فواصل آنها از دو نقطه ثابت موسوم بکانون مقدار ثابتی باشد
 فاصله دو کانون را معمولاً بـ $2c$ و مقدار ثابت فوق را بـ $2a$ نمایش میدهند
 خط واصل باین هر نقطه بیضی را بکانون شعاع حامل مینامند

حال برای یافتن معادله بیضی فرض میکنیم FF' خط واصل بین دو کانون محور
 x و عمود منصف آن محور y باشد و در اینصورت چون نقطه $M(x, y)$
 را در روی بیضی فوق اختیار کنیم بنا بر تعریف $MF + MF' = 2a$
 میباشد حال MF و MF' را از روی مختصات M و F و F' حساب میکنیم
 تا حاصل شود:



$$(x-c)^2 + y^2 = MF^2$$

$$(x+c)^2 + y^2 = MF'^2$$

که چون آنها را از یکدیگر تفریق کنیم نتیجه میشود:

$$\bar{MF}' - MF' = ex$$

$$(MF' + MF)(MF' - MF) = ex \quad \text{و یا}$$

$$MF' + MF = 2a \quad \text{و چون می باشد لذا حاصل میشود}$$

$$MF' - MF = \frac{ex}{a} \quad \text{که با ملاحظه رابطه قبل } MF' \text{ و } MF \text{ بدست می آید}$$

$$MF' = a + \frac{ex}{a} \quad MF = a - \frac{ex}{a} \quad \text{از این قرار:}$$

$$\text{و چون در رابطه } MF' = (x-c)^2 + y^2 \text{ بجای } MF \text{ مقدار آنرا قرار دهیم}$$

$$\left(a - \frac{ex}{a}\right)^2 = (x-c)^2 + y^2 \quad \text{حاصل میشود}$$

$$a'y' + (a' - c')x' - (a' - c')a' = 0 \quad \text{و یا پس از اختصار}$$

$$a' - c' = b' \quad \text{و چون فرض کنیم باشد نتیجه میشود}$$

$$a'y' + b'x' - a'b' = 0$$

$$\frac{x'}{a'} + \frac{y'}{b'} = 1 \quad \text{و یا}$$

که عبارتست از معادله بیضی

محورهای بیضی - محور $x'x'$ بیضی را در نقاط A و A' و محور $y'y'$

بیضی را در نقاط B و B' قطع مینماید خط AA' را محور طول و BB' را محور

اقصر بیضی مینامند

بسهولة میتوان ملاحظه نمود که $AA' = ca$ و $BB' = cb$ میباشد

بطوریکه هرگاه محور طول بیضی $AA' = ۱۲$ و محور اقصر آن $BB' = ۸$ باشد معادله

$$\frac{x^2}{۳۶} + \frac{y^2}{۱۶} = ۱$$

بیضی نسبت به دو محور آن عبارت میگردد از

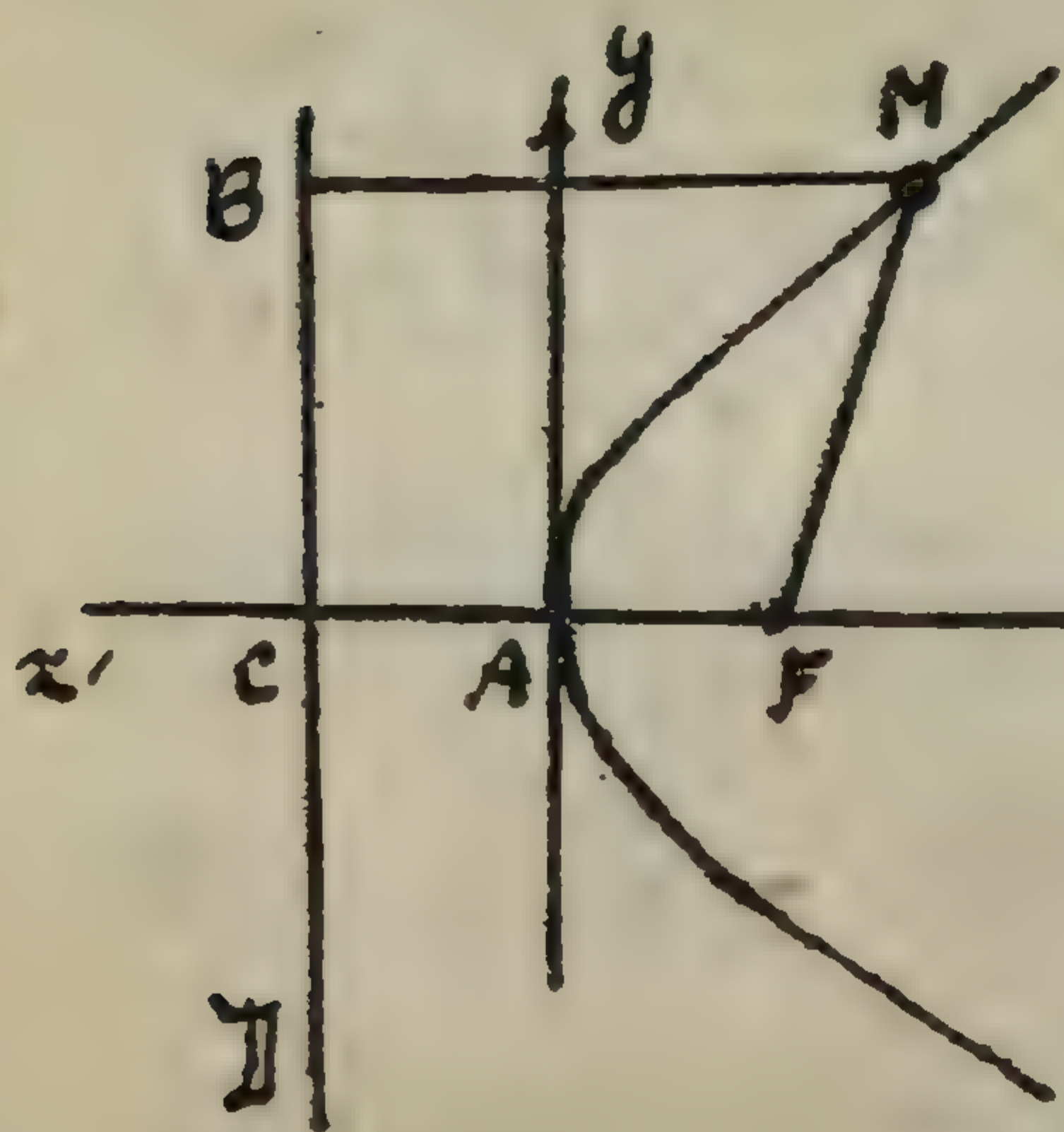
$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} = ۱$$

باشد معادله بیضی بصورت ذیل درمیآید

۲۵ - معادله سهمی - تعریف - سهمی مکان نقاطی است از صفحه

که فاصله آنها از یک نقطه ثابت موسوم بکانون و یک خط ثابت موسوم به خط

مادی مساوی باشد



فاصله کانون F را از خط مادی D

پارابتر سهمی نامیده آن را p

نمایش میدهند

حال برای بدست آوردن معادله

سهمی عمود FC دارد از کانون F بر خط مادی D را محور x و عمود منصف

آن را محور y قرار داده نقطه $M(x, y)$ را در روی سهمی فرض میکنیم و بنا بر تعریف

سهمی $MF = MB$ و یا $MF^2 = MB^2$ خواهد بود و چون

\overline{MF}' و \overline{MB}' را حساب کنیم حاصل میشود :

$$\overline{MF}' = (x - \frac{p}{2})^2 + y^2$$

$$\overline{MB}' = (x + \frac{p}{2})^2$$

$$(x - \frac{p}{2})^2 + y^2 = (x + \frac{p}{2})^2 \quad \text{و بنا بر این}$$

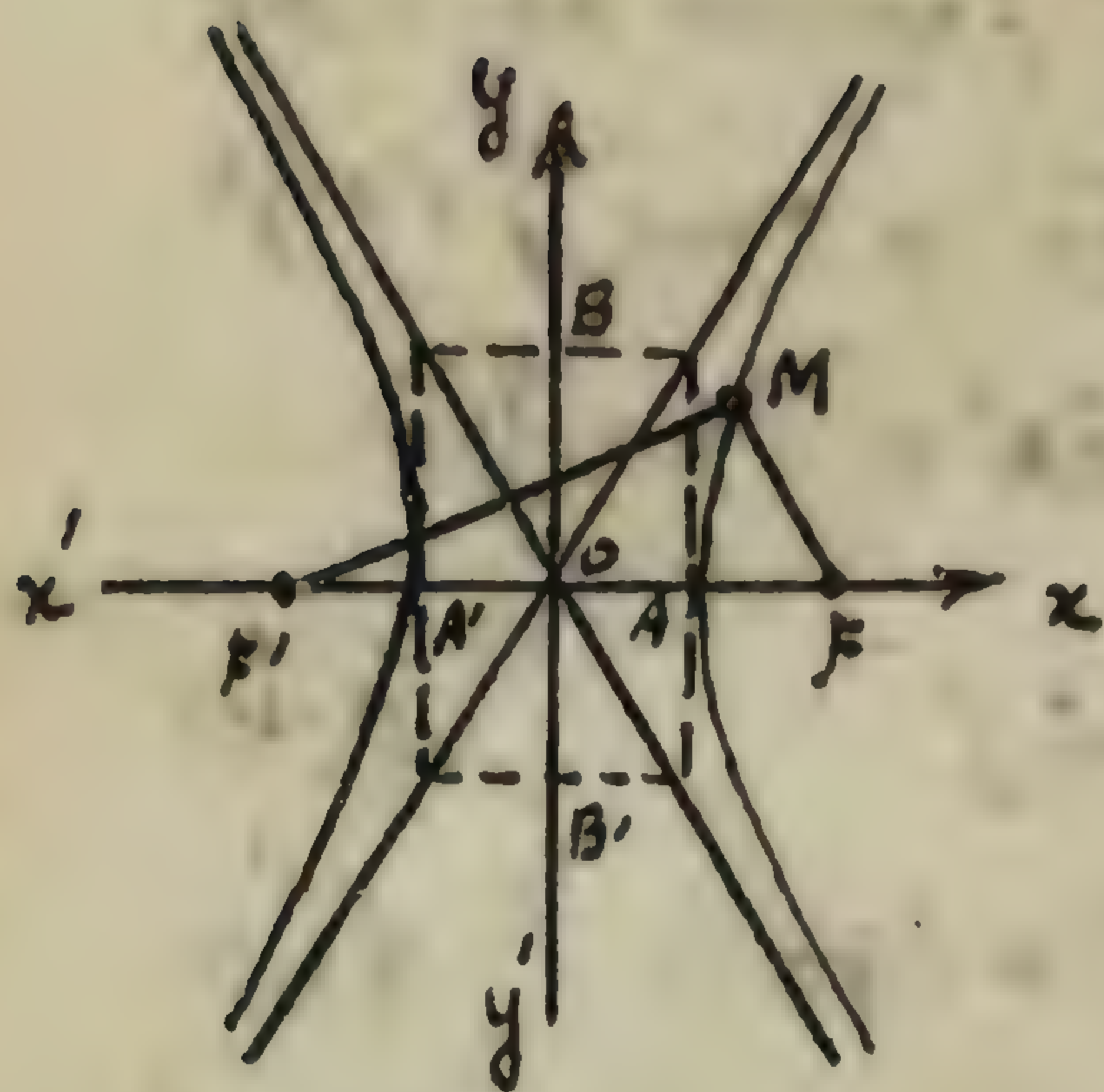
$$y^2 = 2px \quad \text{و از اینجا}$$

که معادله سهمی فوق میباشد

محور و رأس سهمی — محور $x'x$ را محور سهمی و نقطه A را رأس سهمی
مینامند

۲۶ — معادله هذلولی — تعریف — هذلولی مکان نقاطی است
از صفحه که فاصل فواصل آنها از دو نقطه ثابت موسوم بکانون مقدار ثابتی باشد
فاصله دو کانون را معمولاً به $2c$ و مقدار ثابت فوق را به $2a$ نمایش
میدهند و خط واصل مابین هر یک از نقاط هذلولی بکانون را شعاع حامل مینامند
حال برای بدست آوردن معادله هذلولی فرض می کنیم FF' خط واصل
مابین دو کانون محور x و عمود منصف آن محور y باشد و چون نقطه
 $M(x, y)$ را در روی آن اختیار کنیم بنا بر فرض $MF' - MF = 2a$

(۴۷)



$$\overline{MF'} = (x+c)^2 + y^2 \quad \text{ولی}$$

$$\overline{MF} = (x-c)^2 + y^2 \quad \text{و}$$

و بنا بر این

$$\overline{MF'} - \overline{MF} =$$

$$(MF' - MF)(MF' + MF) =$$

$$4cx$$

میباشد که با ملاحظه $MF' - MF = 2a$ حاصل میشود $MF' + MF = \frac{4cx}{2a}$

از دو رابطه اخیر حاصل میشود :

$$MF' = \frac{cx}{a} + a$$

$$MF = \frac{cx}{a} - a$$

که چون در رابطه $\overline{MF} = (x-c)^2 + y^2$ بجای MF مقدار آنرا قرار دهیم حاصل میشود

$$\left(\frac{cx}{a} - a\right)^2 = (x-c)^2 + y^2$$

$$a^2 y^2 - x^2 (c^2 - a^2) + a^2 (c^2 - a^2) = 0$$

یا پس از اختصار $c^2 - a^2 = b^2$ باشد حاصل میشود

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 + a^2 b^2 = 0$$

$$\frac{x'}{a'} - \frac{y'}{b'} = 1 \quad \text{و یا}$$

که معادله مذلولی نسبت به محور $x'x$ و $y'y$ میباشد

محورهای مذلولی — امتداد خط $F'F$ که در اینجا محور $x'x$ میباشد

و همچنین عمود منصف آن که در اینجا محور $y'y$ قرار داده شده است محورهای

مذلولی موسوم میباشد

$$\frac{x'}{a'} - \frac{y'}{b'} = 1 \quad \text{خطوط مجانب مذلولی — چون در معادله}$$

مقدار y را مساوی صفر قرار دهیم حاصل میشود $x = \pm a$ که عبارتست

از طول نقاط A و A' محل تقاطع منحنی با محور $x'x$ در این صورت طول قطعه خط

$$AA' = 2a \quad \text{میباشد}$$

همچنین اگر در روی محور $y'y$ از نقطه O و در طرفین آن قطعه $OB = OB' = \sqrt{c^2 - a^2}$

را جدا کنیم قطعه خط $BB' = 2b$ خواهد بود

هرگاه در روی AA' و BB' مربع مستطیل بنا نموده اقطار آن را رسم کنیم

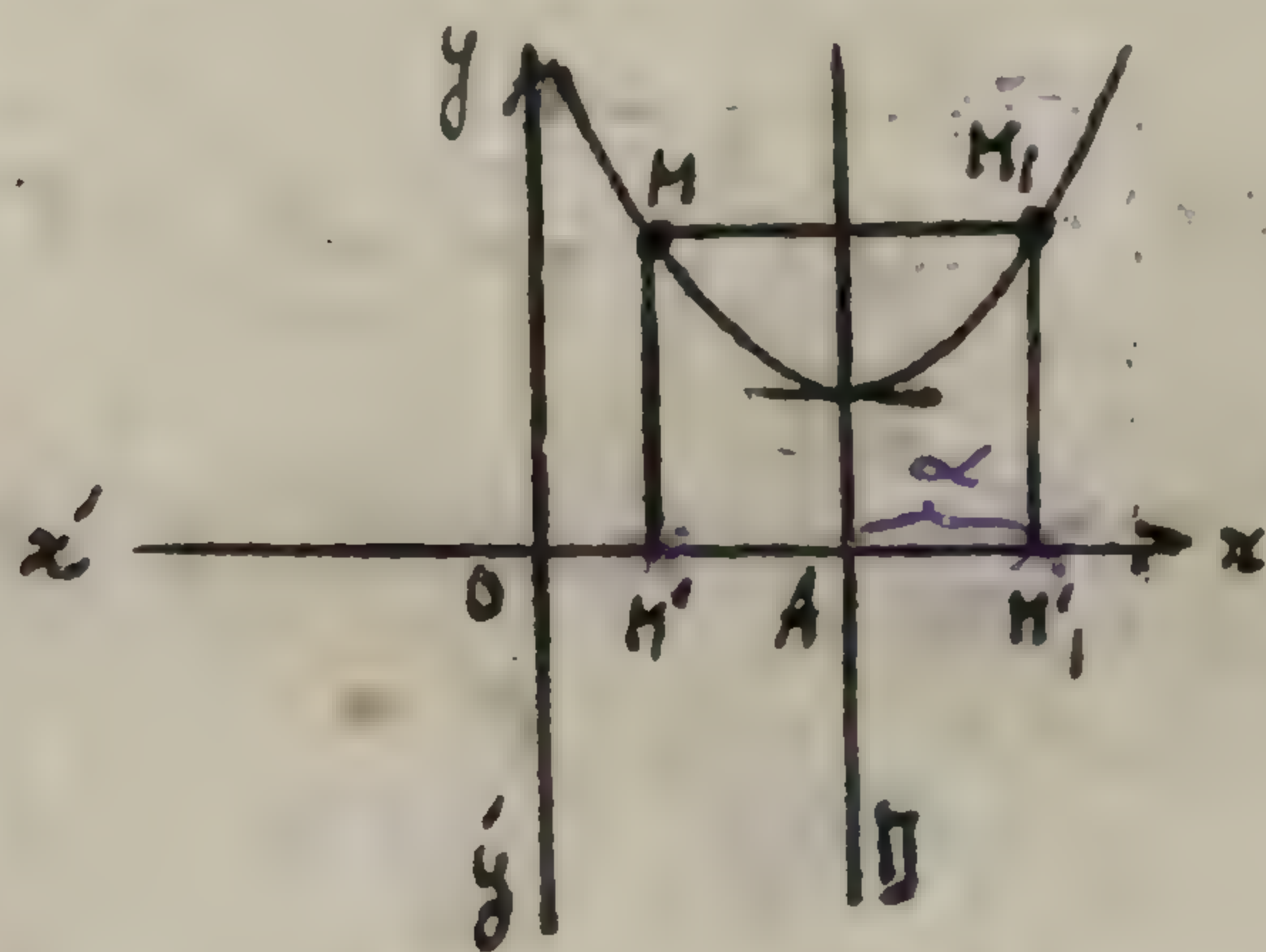
و دو خط بدست میآید که آنها را خطوط مجانب مذلولی مینامند

و اختصاص این خطوط آنست که فاصله نقاط منحنی از این خطوط میل میکند به سمت صفر

هرگاه نقاط در روی منحنی بی نهایت دور شوند
تقارن منحنیات نسبت به یک محور یا یک نقطه

۲۷- قضیه ۱- منحنی C که معادله آن بصورت کلی $f(x, y) = 0$ فرض شود نسبت به خط $x = a$ قرینه است هرگاه به x دو مقدار قرینه نسبت به a بدسیم برای y یک مقدار بدست آید

اولاً فرض میکنیم منحنی C نسبت به خط Δ بمعادله $x = a$ قرینه باشد



اگر دو نقطه قرینه M و M_1

را در روی منحنی فرض کنیم MM_1

موازی محور $x'x$ ولذا

$$M'H = M_1'H_1 \text{ میگردد}$$

و از طرفی نقطه A وسط $M'H_1$ واقع شده بطوریکه اگر فرض کنیم $AM_1 = \alpha$

باشد $OH' = a - \alpha$ و $OH_1 = a + \alpha$ خواهد بود و بنابراین

مقادیر y نظیر دو مقدار قرینه نسبت به a متساوی میگردد

ثانیاً فرض میکنیم $OH' = a - \alpha$ و $OH_1 = a + \alpha$ و $M'H = M_1'H_1$ باشد

در اینصورت MM_1 موازی محور $x'x$ و چون نقطه A وسط $M'H_1$ میباشد

لذا خط Π عمود منصف MM_1 بوده و نقاط M و M_1 نسبت به خط Π قرینه
میگردند

حالت مخصوص - تقارن منحنی نسبت به محور y - هرگاه فرض
کنیم $y=0$ باشد خط Π با محور y تشبیه میگردد و بنا بر این بیان حکم
فوق چنین میشود :

منحنی C معادله کلی $f(x, y) = 0$ نسبت به محور y قرینه است هرگاه
به دو مقدار مساوی و مختلف علامه بدسیم برای y یک مقدار بدست آید
مثال ۱ - منحنی $y = (x-2)^2$ سهمی است که نسبت به خط $x=2$
قرینه است چه اگر در معادله فوق فرض کنیم $x = 2 \pm \alpha$ باشد مقدار $y = \alpha^2$
خواهد بود

مثال ۲ - منحنی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ و $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ و $x^2 = 2py$
که اولی معادله بیضی و دومی معادله هذلولی و سومی معادله سهمی است نسبت به محور
 y قرینه میباشند چه اگر در آنها به x دو مقدار مساوی و مختلف علامه
بدسیم یک مقدار برای y بدست میآید بعبارة اخری هرگاه در معادلات
فوق x را به x - تبدیل کنیم معادله تغییر نمیکند

تبصره - بطور کلی باید در نظر داشت که کلیه معادلاتی که توانی x آنها
از مرتبه زوج میباشد دارای خاصیت فوق بوده و بنا بر این منحنی آنها نسبت
بمحور y قرینه میباشد

۲۸ - قضیه ۲ - منحنی C که معادله کلی آن $f(x, y) = 0$ میباشد نسبت
بمحور y قرینه است هرگاه $y = 0$ دو مقدار قرینه نسبت
به x بدسیم برای x یک مقدار بدست آید

حکم فوق نیز بطریقی مشابه با قضیه (۱) اثبات میشود

حالت مخصوص - تقارن منحنی نسبت به محور x -
هرگاه فرض کنیم $y = 0$ باشد خط $y = 0$ با محور x مشبک
و بنا بر این حکم فوق چنین میشود :

منحنی C معادله کلی $f(x, y) = 0$ نسبت به محور x قرینه است هرگاه
به دو مقدار مساوی و مختلف علامه بدسیم برای x یک مقدار بدست آید

مثال ۱ - منحنی $x^2 = y^2 - R^2$ یا $(y - R)(y + R) = x^2$ بطوریکه میدانیم معادله
دایره است که محضات مرکز آن $(0, R)$ میباشد و چون معادله فوق را

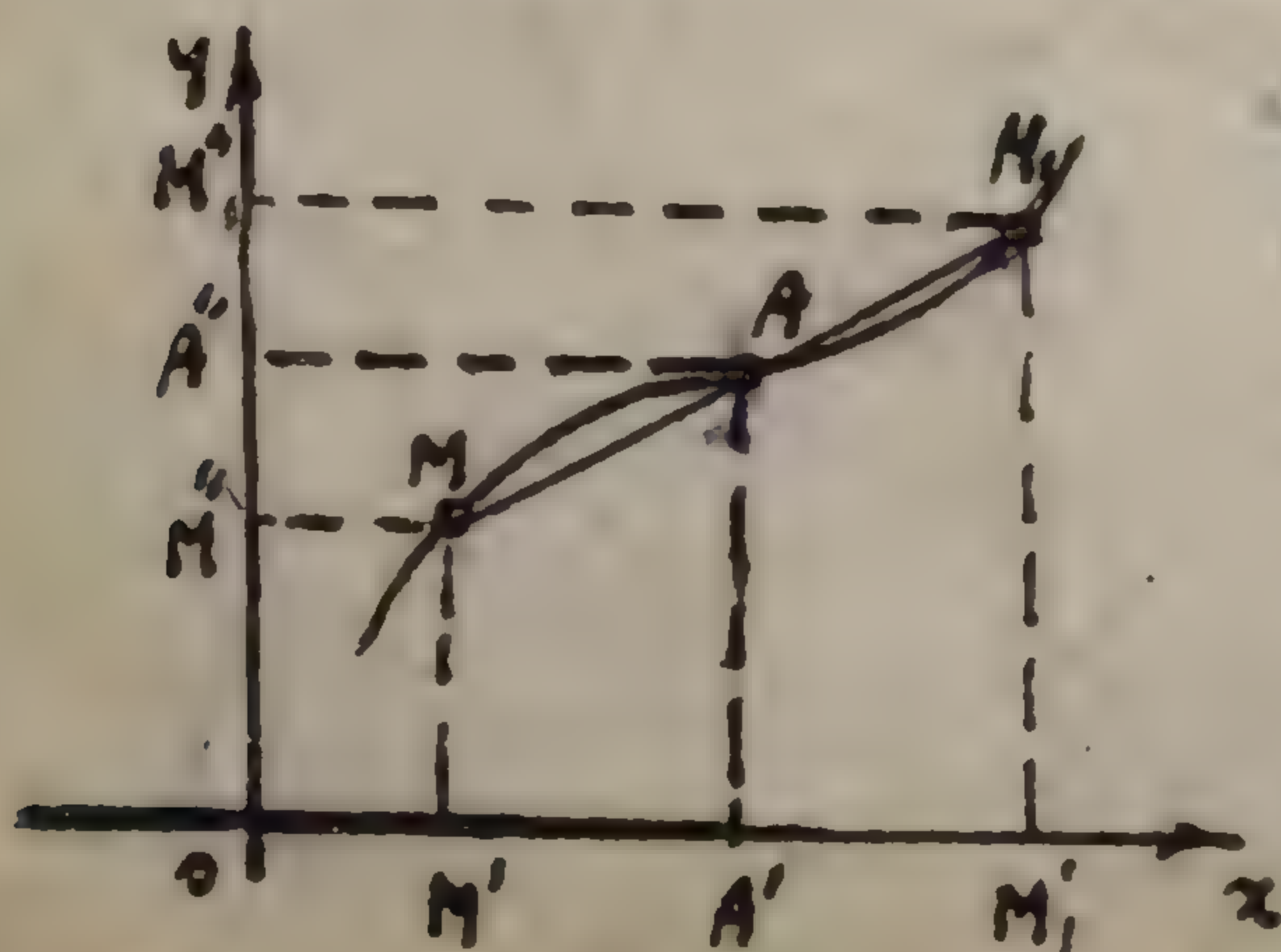
نسبت به y حل کنیم حاصل میشود :

$$y = R \pm \sqrt{R^2 - (x - \alpha)^2}$$

حال ملاحظه میکنیم که در عبارت فوق بازار هر مقدار x دو مقدار قرینه نسبت به
 هر برای y بدست میآید بطوریکه محور $y = 0$ محور تقارن منحنی فوق میباشد
 مثال ۲- چون معادله $x^2 + y^2 = 1$ را نسبت به y حل کنیم
 حاصل میشود $y = \pm \sqrt{1 - x^2}$ و چنانکه ملاحظه میشود بازار هر مقدار x
 برای y دو مقدار مساوی و مختلف العلامه بدست میآید بطوریکه منحنی فوق
 نسبت به محور x قرینه است

تبصره - باید بهواره در نظر داشت که کلیه معادلاتی که در آنها قوای y
 از درجه زوج باشد دارای خاصیت فوق بوده و منحنی آنها نسبت به محور x
 قرینه میباشد

۲۹- قضیه ۳- منحنی C که معادله کلی آن $f(x, y) = 0$ میباشد
 نسبت به نقطه $A(a, b)$ قرینه است هرگاه بازار دو مقدار x قرینه نسبت به



a برای y دو مقدار قرینه

نسبت به b بدست آید

اولاً فرض میکنیم منحنی C نسبت

نقطه A قرینه باشد

چون دو نقطه قرینه H و H_1 را در روی آن اختیار نموده نقاط فوق را بر دو محور تصویر کنیم با برآنگاه A وسط HH_1 می باشد A' وسط $H'H'_1$ و A'' وسط $H''H''_1$ بوده بطوریکه اگر $H'A' = a$ و $H''A'' = b$ باشد $OH' = a - a$ و $OH'' = \beta + b$ و $OH_1 = \alpha + a$ و $OH'' = \beta - b$ خواهد بود

ثانیاً هرگاه فرض کنیم $OH' = a - a$ و $OH'' = \alpha + a$ و $OH_1 = \beta - b$ و $OH'' = \beta + b$ باشد نقطه A' وسط $H'H'_1$ و نقطه A'' وسط $H''H''_1$ و بالنتیجه A وسط HH_1 واقع شده و نقاط H و H_1 نسبت به نقطه A قرینه میگردند

حالت مخصوص - تقارن منحنی نسبت بمبدأ - هرگاه

$\alpha = \beta = 0$ فرض شود نقطه A بمبدأ O مشتبّه شده و بیان حکم فوق چنین میشود

منحنی C بمعادله $y = 0$ نسبت بمبدأ O قرینه است هرگاه برای x دو مقدار مساوی و مختلف علامه اختیار کنیم برای y نیز دو مقدار مساوی و مختلف علامه بدست آید

مثال ۱ - در معادله $y - 1 = x(x - 5)^3 + (x - 5)$

چون فرض کنیم $x = 5 \pm a$ باشد حاصل میشود :



$$x = a + \alpha$$

$$y = 1 + (2\alpha^3 + \alpha)$$

$$x_1 = a - \alpha$$

$$y_1 = 1 - (2\alpha^3 + \alpha)$$

بطوریکه ملاحظه میشود مقادیر y نظیر نسبت به اقرینه میباشند لذا منحنی

فوق نسبت نقطه $A(1, 0)$ قرینه میباشند

مثال ۲ - چون در معادله $y = x^5 - 2x^3$ فرض کنیم

$x = \pm a$ باشد حاصل میشود :

$$x = +a$$

$$y = a^5 - 2a^3$$

$$x_1 = -a$$

$$y_1 = -(a^5 - 2a^3)$$

یعنی مقادیر y نظیر ساوی و مختلف علامه اند لذا منحنی نسبت به مبدأ a قرینه
میباشد

(مکان هندسی)

۳۵ - معادله مکان - معادله مکان هندسی نقاطی را که دارای خاصیت

هندسی مشترکی باشند همواره میتوان از روی خاصیت مزبور بدست آورد

چنانکه معادله دایره و بیضی و سهمی و هذلولی را از روی خواصشان بدست آوردیم

گاهی مقصود تعیین معادله مکان نقاطی است که فصل مشترک دو خط باشند

که بر حسب تغییر پارامتری وضعیتشان تغییر نماید در این صورت هرگاه معادله دو خط

$$\text{بصورت : } f(x, y, z) = 0$$

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

در دست باشد (به نمایش پارامتری باشد) برای تعیین مکان نقطه تقاطع این دو خط هرگاه به تغییر نماید کافیت مابین دو معادله فوق به حذف کنیم چه در این صورت رابطه مابین x و y نقطه تقاطع بدست میاید که بستگی بمقدار z ندارد

اینک برای قرین چند مسئله حل میکنیم

مسئله ۱ - محضات نقطه عبارتت از

$$\begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = \frac{1}{4} + 2t \end{cases}$$

(نمایش پارامتریت که از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر میکند) مطلوبست مکان نقطه

برای تعیین مکان نقطه در دو معادله فوق پارامتر t را حذف میکنیم تا

$$\text{حاصل شود : } (x-1)^2 + 4y^2 = 1 \quad \text{و یا} \quad (x-1)^2 + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$$

بنابر این مکان بیضی است که محورها طول آن ۲ و محورا قصر آن ۱ و محضات

مرکز آن (۱ و ۰) میباشد

مسئله ۲ - مطلوبست مکان تقاطعی که تفاضل مرتبین فواصل آنها از دو نقطه

ثابت A و B مقدار ثابت K باشد

و نقطه A و B را بفاصله

ثابت $AB = \epsilon a$ اختیار نمود

AB را محور $x-x'$ و عمود منصف

آنرا محور $y-y'$ قرار میدسیم حال اگر

فرض کنیم نقطه $M(x, y)$ یکی از نقاط فوق باشد بنا بر فرض :

$$\overline{MA}' - \overline{MB}' = K$$

میباشد چون \overline{MA}' و \overline{MB}' را از روی مختصات M و A و B

حساب کنیم حاصل میشود :

$$\overline{MA}' = (x+a)' + y'$$

$$\overline{MB}' = (x-a)' + y'$$

که پس از تفریق آنها از یکدیگر نتیجه میشود :

$$\overline{MA}' - \overline{MB}' = (x+a)' - (x-a)' = K$$

$$\epsilon ax = K$$

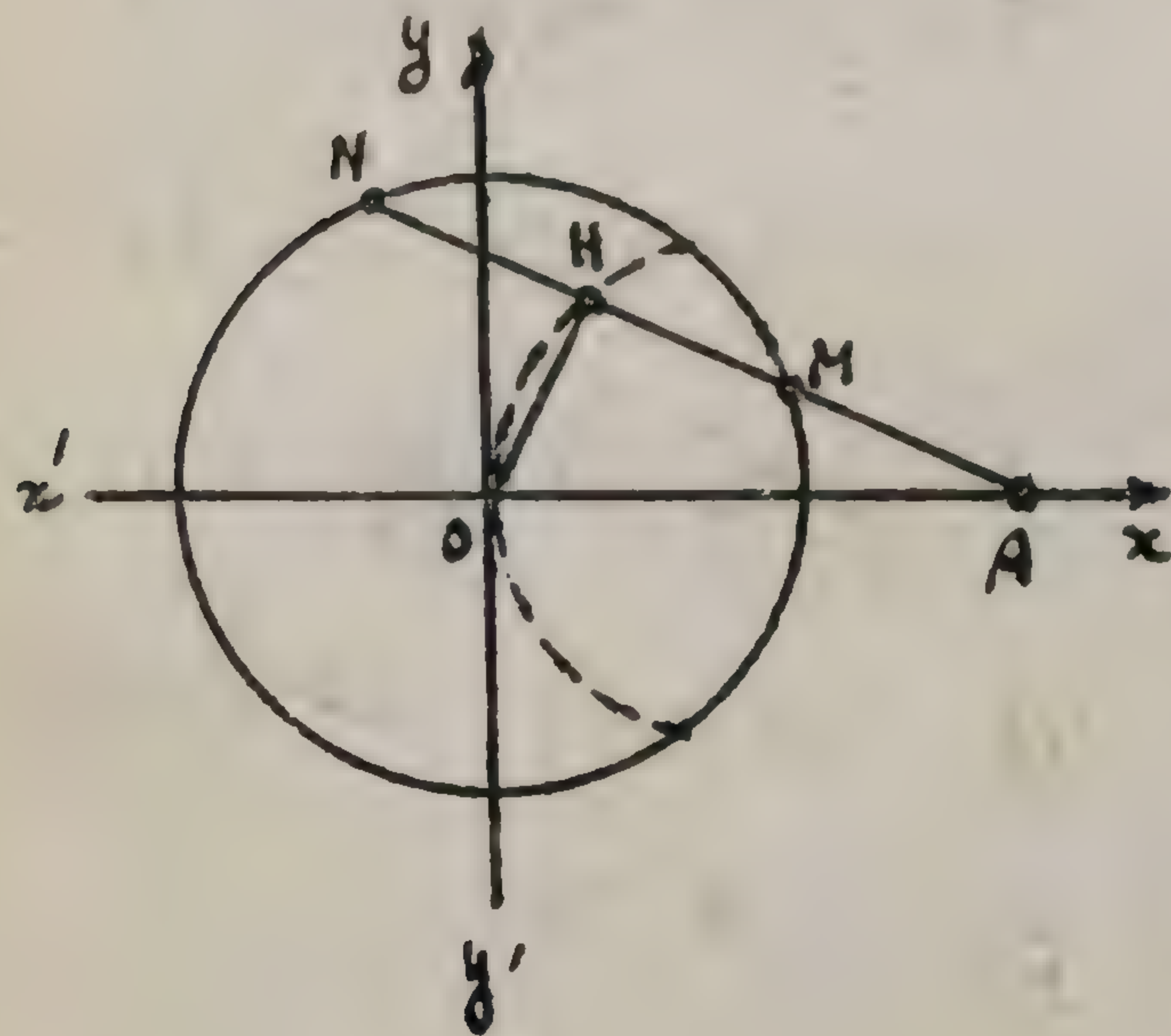
و یا

و از اینجا $x = \frac{K}{\epsilon a} = \frac{K}{\epsilon \times AB}$ یعنی مکان مطلوب خطی است عمود

بر AB که موقع آن از نقطه O وسط AB بفاصله $\frac{K}{\epsilon \times AB}$ میباشد.

مسئله ۳ - دایره O و نقطه ثابت A را که فاصله $OA = a$ میباشد
 اختیار نموده از نقطه A قاطع غیر مشخص بر دایره رسم میکنیم مطلوبست مکان

نقطه H وسط وتر MN



OA را وصل نموده آنرا محور

$x'x$ و عمود وارد از O را

محور $y'y$ قرار میدهیم

و بنا بر آنچه میدانیم نقطه H وسط

وتر MN موقع عمود وارد از O بر وتر مزبور میباشد حال اگر ضرب زاویه

قاطع را y فرض کنیم معادله قاطع بصورت $y = x(x - a)$

و معادله OH بصورت $y = -\frac{1}{x}x$ میباشد بطوریکه برای تعیین

مکان H کافیت در این دو معادله y را حذف کنیم تا حاصل شود:

$$x^2 + y^2 - ax = 0$$

که معادله دایره است بقطر OA

واضح است که فقط جزئی از دایره فوق مکان محسوب میشود که در داخل دایره

مفروض واقع باشد بطوریکه برای تعیین طول نقاط تقاطع دو دایره که مکان

بدان محدود میشود کافیت که معادله مکان را با معادله دایره مفروض که

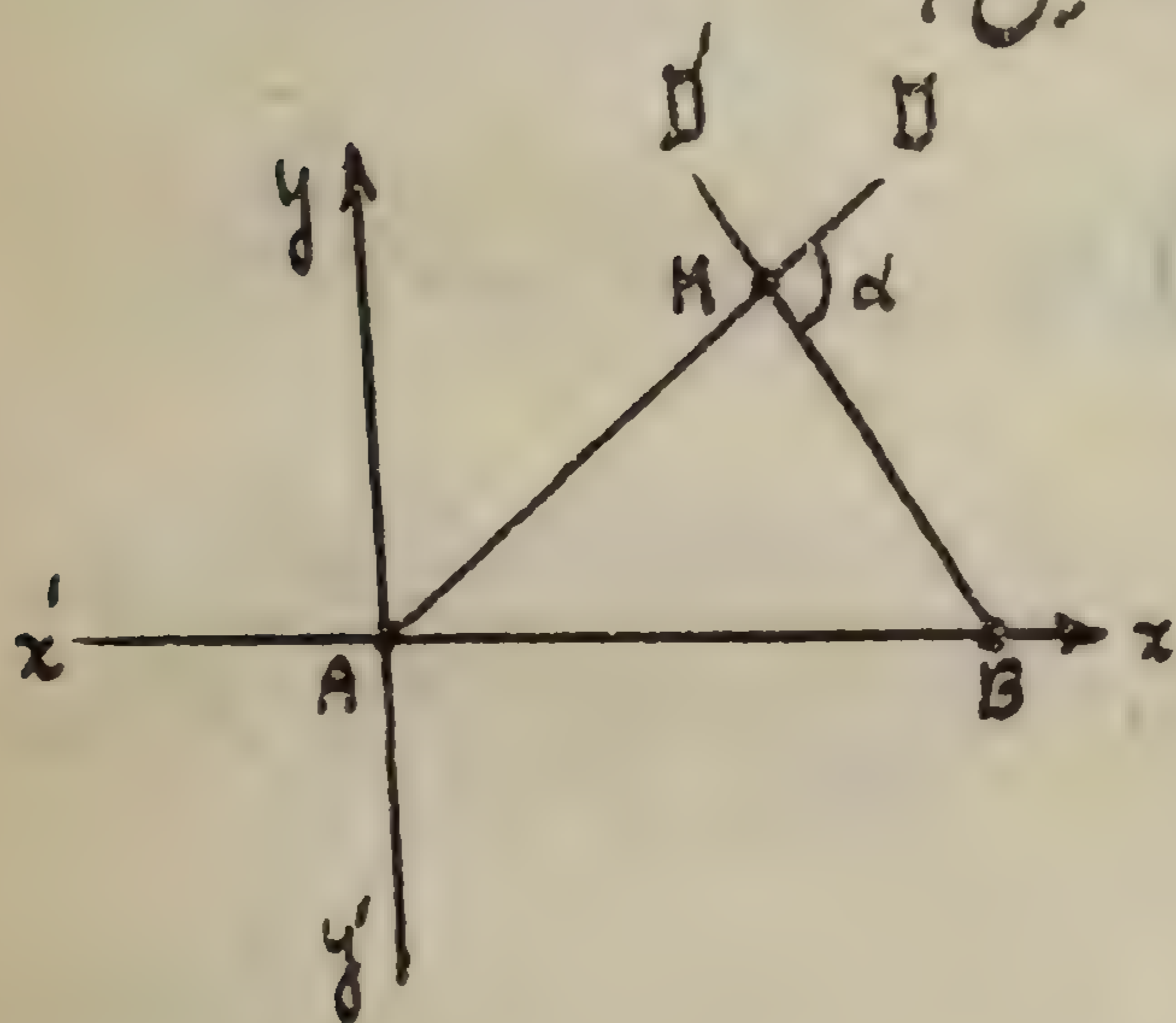
عبارت از $x^2 + y^2 = R^2$ حل کنیم تا حاصل شود $x = \frac{R^2}{a}$

مسئله ۴ - مطلوب است مکان نقاط تقاطع دو خط که بر نقطه ثابتی مرور

نموده و بایکدیگر زاویه ثابت α را تشکیل دهند

فرض میکنیم A و B دو نقطه

ثابت و $AB = a$ باشد



AB را محور x و عمود دارد

از A را بر محور AB محور y

قرار داده دو خط l و l' را فرض میکنیم که بر A و B مرور نموده و بایکدیگر

زاویه α تشکیل دهند چون ضریب زاویه l را m و ضریب زاویه l' را

m' فرض کنیم معادله خط l و l' عبارت خواهد بود از:

$$y = mx$$

$$y = m'(x - a)$$

حال برای آنکه دو خط بایکدیگر زاویه α تشکیل دهند کافیت که

$$\tan \alpha = \frac{m' - m}{1 + m'm}$$

باشد و چون ما بین آن رابطه فوق m و m' را حذف کنیم حاصل میشود:

$$x^2 + y^2 - 2x + \frac{a}{f\alpha} y = 0$$

که عبارتست از معادله دایره ماربر A و B که مختصات مرکز آنرا نیز

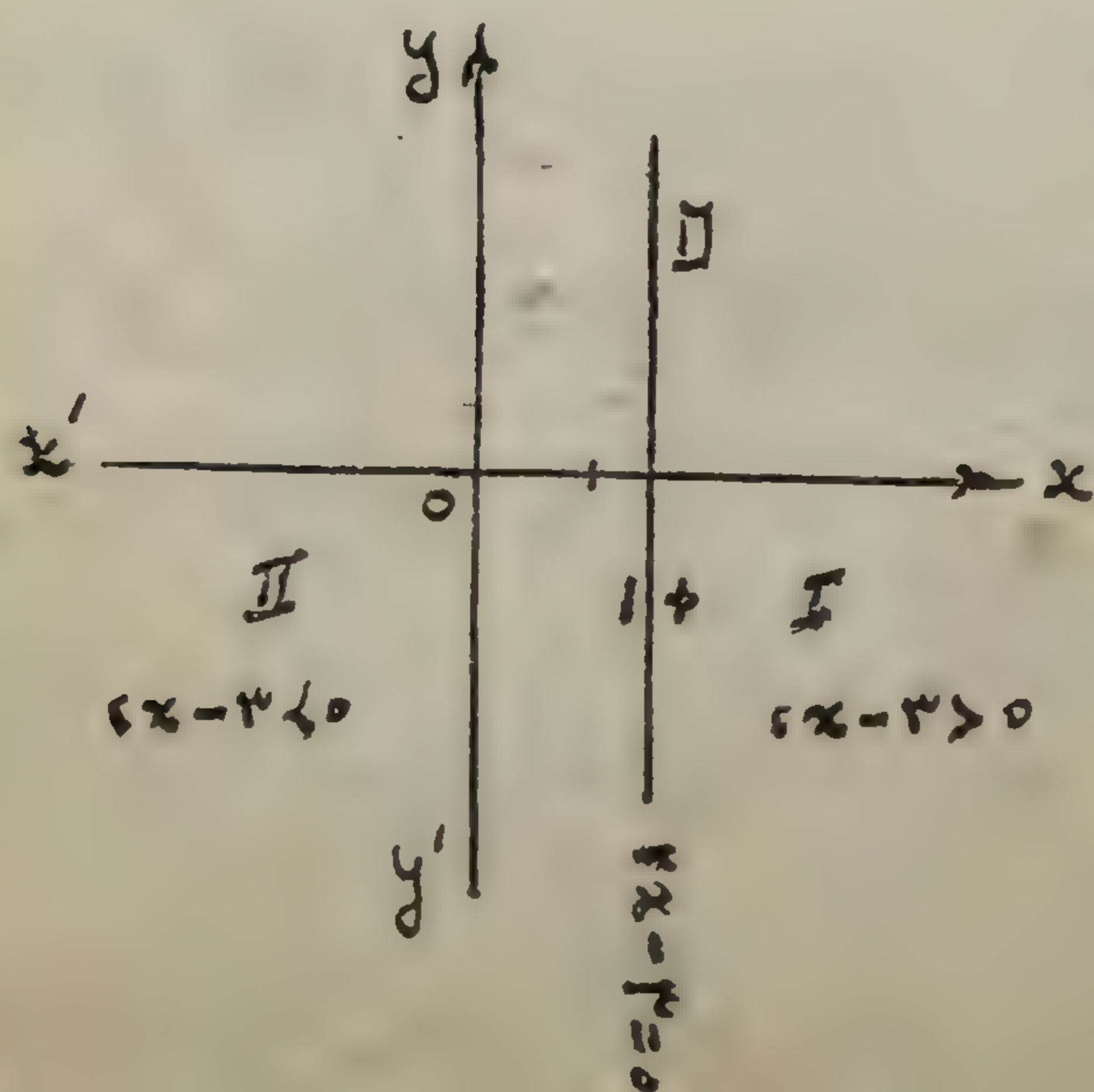
بسهولة میتوان حساب نمود

تغییر هندسی حل نامعادله های یک یا دو مجهولی

۳۱- تغییر هندسی علامت عبارت یک مجهولی $2x - 3$ -

چون عبارت فوق را مساوی صفر قرار داده آنرا نسبت به x حل کنیم حاصل میشود

$x = \frac{3}{2}$ حال خط $x = \frac{3}{2}$ را بمعادله $x = \frac{3}{2}$ رسم میکنیم این خط سطح



دو محور را به دو نیم سطح تقسیم نماید

بنابر آنکه x طول نقاط

واقع در سطح دو محور مفروض باشد

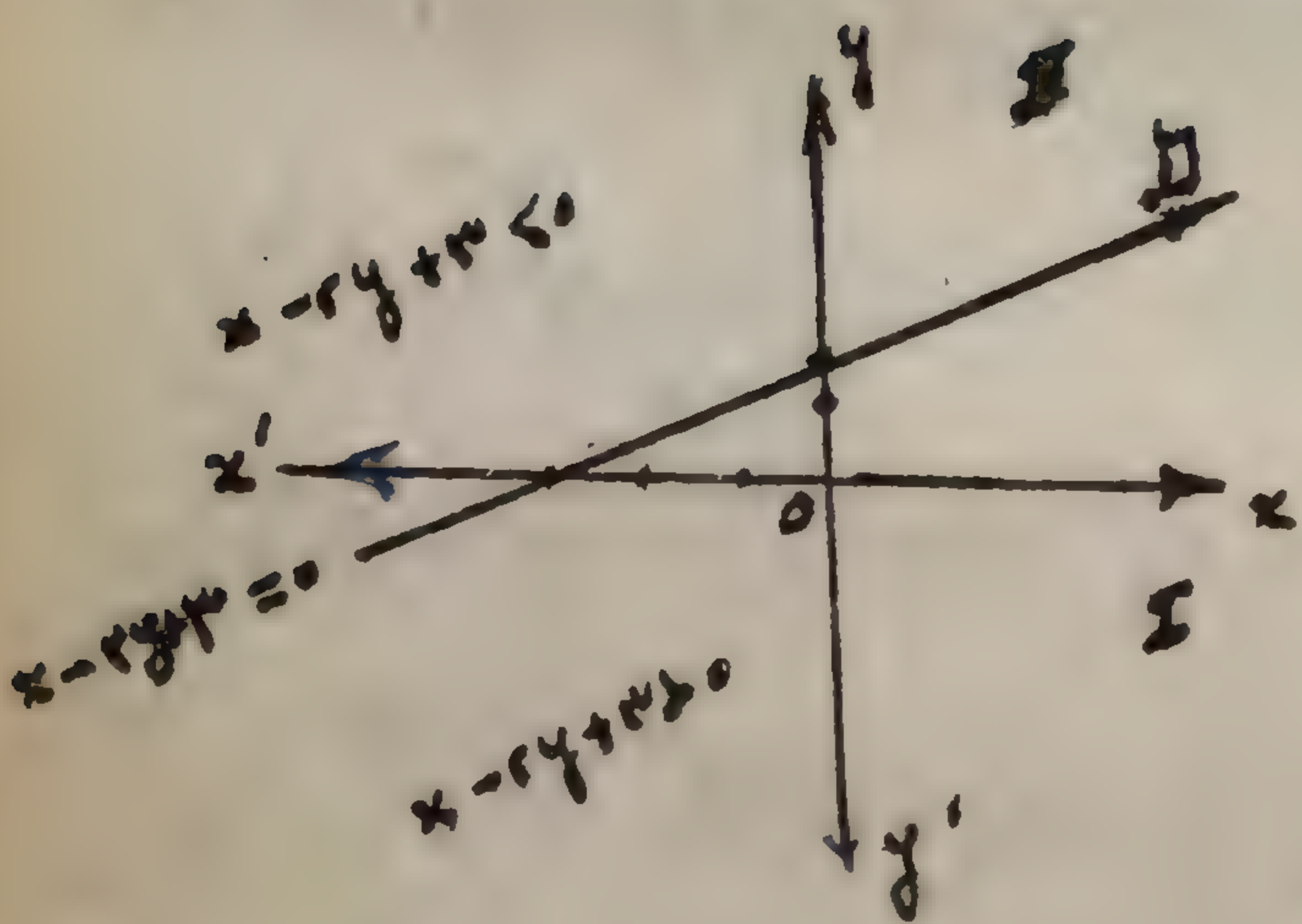
برای نقاط واقع در ناحیه I

عبارت $2x - 3$ مثبت و

برای نقاط واقع در ناحیه II عبارت $2x - 3$ منفی و برای نقاط واقع در روی

خط لا عبارت $۳ - ۲x$ مساوی صفر می باشد بطوریکه خط لا در نیم سطح
 I و II بر ترتیب تغییر هندسی معادله $۳ - ۲x = ۰$ و نامعادله $۳ - ۲x > ۰$
 و $۳ - ۲x < ۰$ خواهد بود

۳۲ - تغییر هندسی علامت عبارت دو مجهولی $x - ۲y + ۴ = ۰$ -
 چون عبارت فوق را مساوی صفر قرار داده x و y را محضات نقاط واقع
 در سطح دو محور قائم فرض کنیم و خط لا بمعادله $x - ۲y + ۴ = ۰$
 را رسم کنیم این خط نیز سطح دو محور را بدو نیم سطح تقسیم نماید برای نقاط واقع
 در نیم سطح I عبارت فوق مثبت و برای نقاط



واقع در نیم سطح II عبارت فوق
 منفی و برای نقاط واقع در روی
 خط لا عبارت فوق مساوی صفر
 خواهد بود بطوریکه خط لا در نیم سطح
 I و II بر ترتیب تغییر هندسی معادله

$x - ۲y + ۴ = ۰$ و نامعادله $x - ۲y + ۴ > ۰$ و $x - ۲y + ۴ < ۰$ میباشند

۳۳ - تغییر هندسی علامت عبارت دو مجهولی درجه دوم

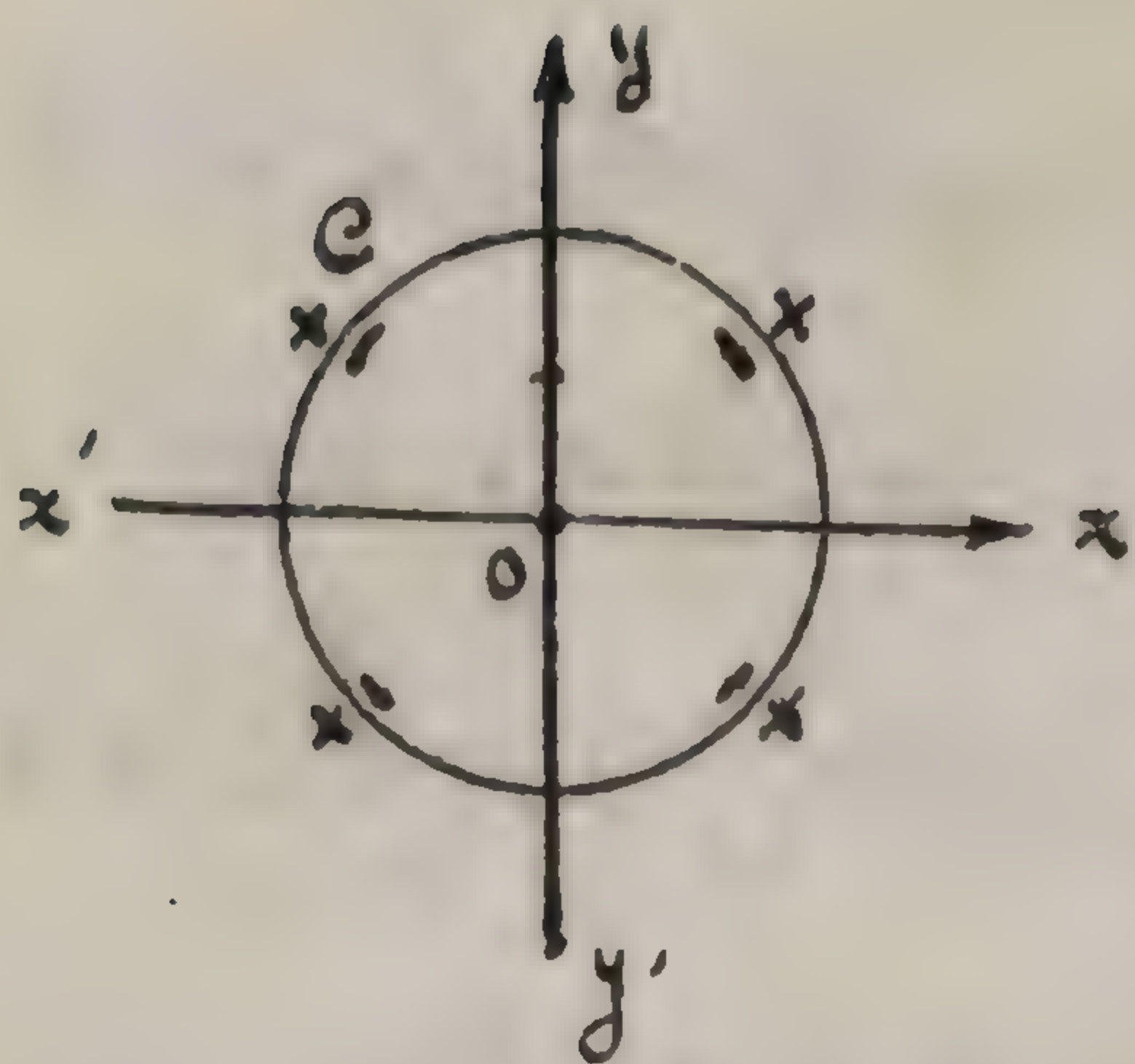
$x^2 + y^2 - 4$ - چون عبارت

فوق را مساوی صفر قرار دهیم حال

میشود $x^2 + y^2 = 4$ حال اگر x

و y را مختصات نقطه مفروضه داشته

در سطح دو محور قائم فرض نموده دایره



c را بمعادله $x^2 + y^2 = 4$ رسم کنیم این دایره سطح دو محور را بدو قسمت تقسیم

مینماید برای نقاط واقع در داخل دایره عبارت فوق منفی و برای نقاط واقع

در خارج دایره عبارت فوق مثبت و برای نقاط واقع در روی دایره عبارت

فوق مساوی صفر میباشد بطوریکه نقاط واقع بر روی دایره یا خارج دایره یا داخل

آن برترقیب تغییرهند سی معادله $x^2 + y^2 = 4$ و نامعادلات

$x^2 + y^2 - 4 > 0$ و $x^2 + y^2 - 4 < 0$ خواهند بود

برای آنکه بموارد استعمال مطالب فوق آشنا شویم مسائل ذیل را حل میکنیم

مسئله ۱ - مطلوبست تعیین مکان نقاطی از سطح دو محور قائم که مختصات

آنها در نامعادلات ذیل صدق نمایند

$$x^2 + y^2 < 0$$

$$x^2 + y^2 - 1 > 0$$

$$x^2 + y^2 - 4 < 0$$

هر یک از عبارات فوق را مساوی صفر قرار داده خط نظیر آنها را رسم میکنیم

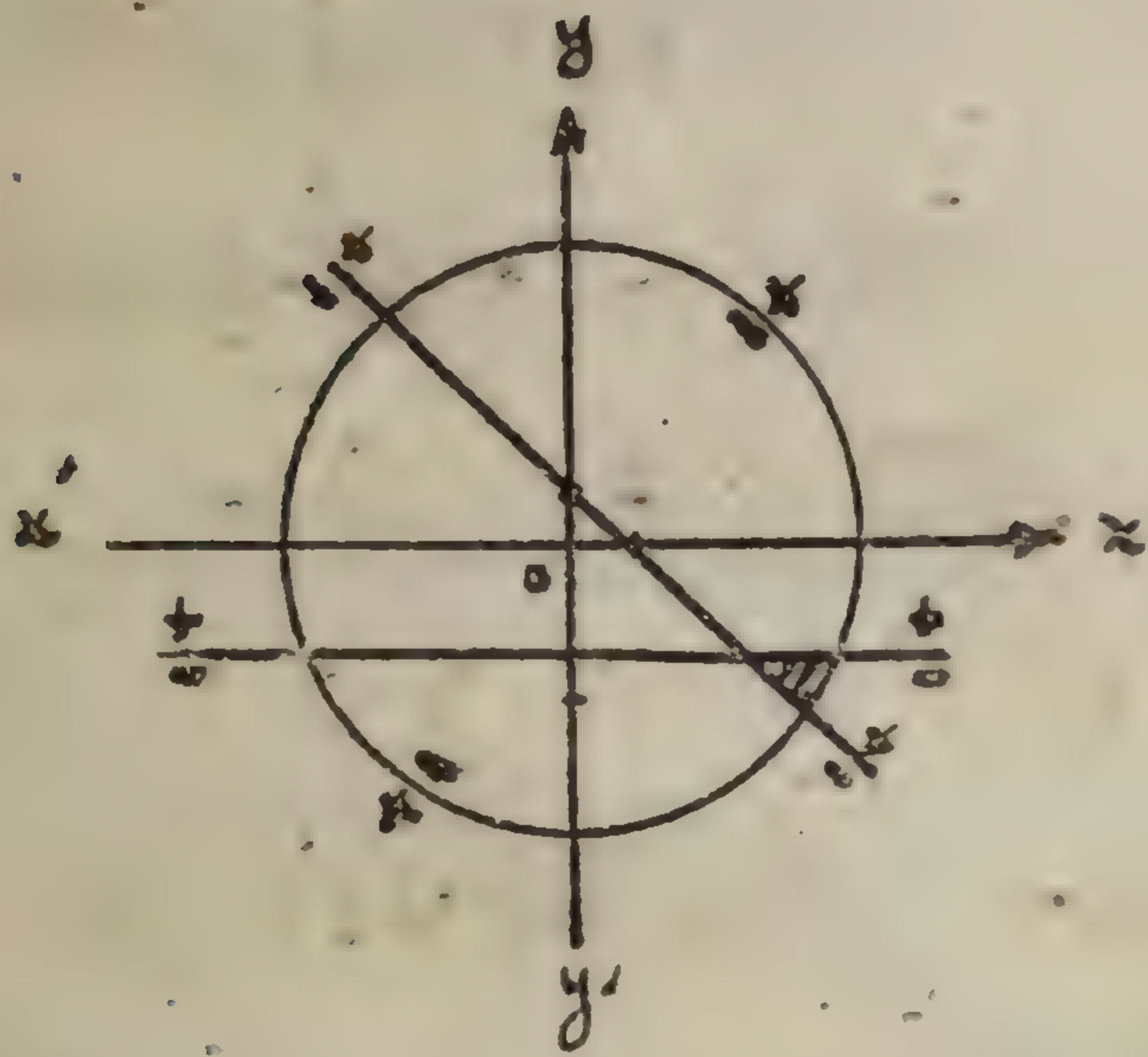
و علامت عبارات را در طرفین

خطوط تعیین مینماییم در این صورت

ناحیه که در شکل با پر داز مشخص

میباشد جواب مسئله خواهد بود

مسئله ۲ - مطلوب است



تعیین مکان نقاطی از سطح دو محور قائم که مختصات آنها در عبارت ذیل صدق نماید

$$x^2 + 4y^2 - 4 > 0 \quad (x^2 + 1 - y - 4)(-y - 1 - 4y)$$

هر یک از عوامل فوق را مساوی صفر قرار میدهم و نمایش هندسی آنها را که

اولی خط مستقیم و دومی سهمی و سومی بیضی میباشد رسم نموده علامت عبارات

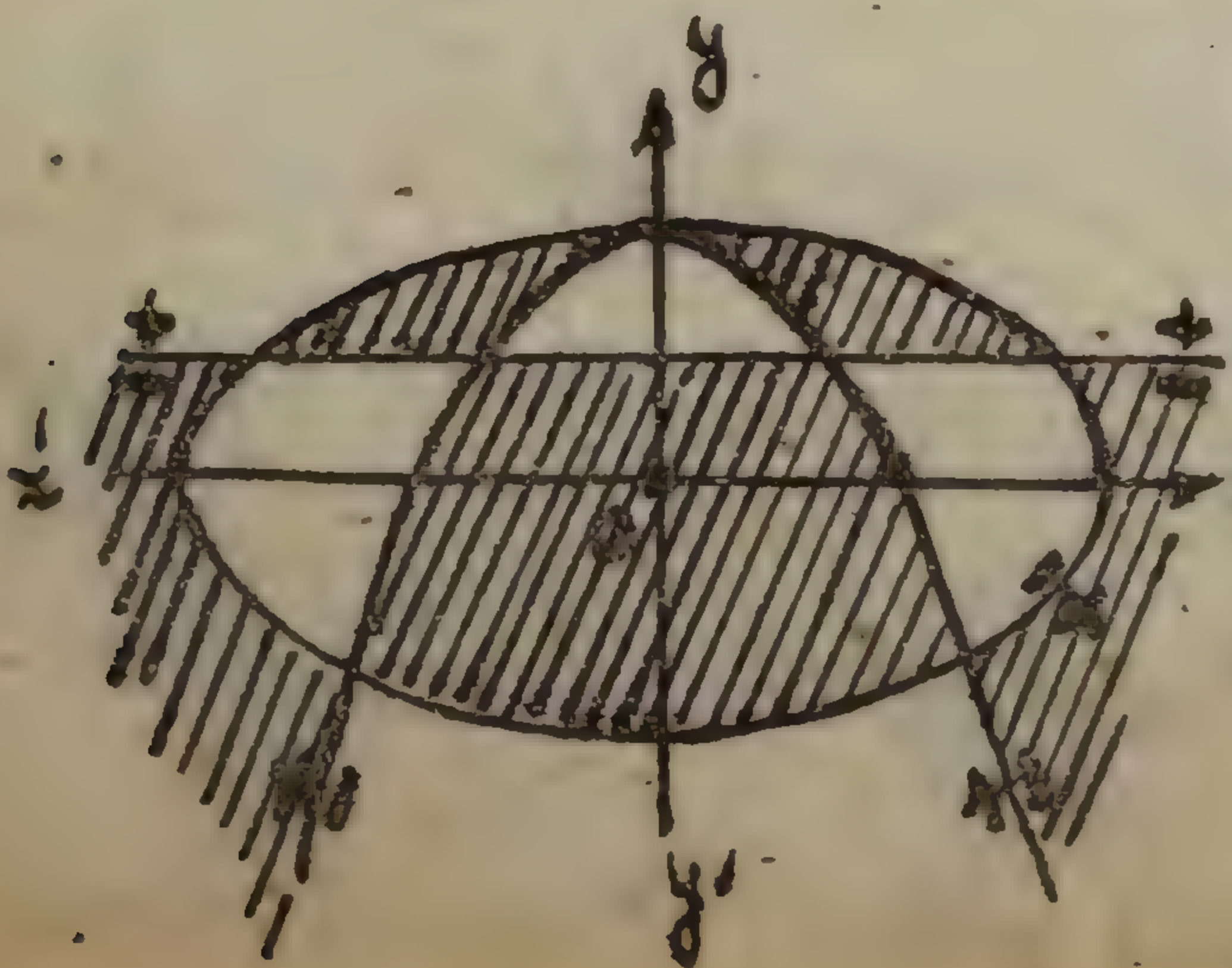
فوق را در طرفین خطوط تحقیق مینمایم و بعد از ضرب علامات با ملاحظه جهت نا

مساوی عبارت مفروض نواحی را

که در شکل با پر داز مشخص شده است

و جواب مسئله است بدست

میاوریم



(مسائل)

۲۸- منحنیهای ذیل را رسم کنید :

$$x^2 + y^2 = 9 \quad (x-1)^2 + (y+2)^2 = 1 \quad x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$$

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \quad 4(x-1)^2 + 9(y-3)^2 = 36 \quad y^2 = 6x$$

$$y^2 = x+1 \quad y = x^2 \quad y = (x+2)^2 \quad y = x^2 - 3x + 2$$

$$x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 4y + 6 = 0 \quad x^2 + 4xy + 4y^2 + 6x + 4y + 1 = 0$$

۲۹- مطلوبست معادله چهار دایره بشعاع R که بر مبدأ O مرور نموده و مراکز آنها بر روی

محور Ox واقع باشد همچنین مطلوبست معادله دایره محیط بر چهار دایره فوق و معادله دایره مار
بر مراکز آنها

۳۰- مطلوبست معادله چهار دایره بشعاع R مماس بر محور Ox و معادله دو دایره مماس

بر دو دایره فوق و همچنین معادله دایره مار بر مراکز آنها

۳۱- معادله دایره عبارتست از

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$$

مطلوبست مختصات مرکز و طول شعاع آن و همچنین معادلات مماسهای بر دایره و نقطه تقاطع
با محور Ox

۳۲- دایره بر نقطه $(5 و 3)$ مرور نموده و محور Ox را در نقاط A و B قطع میکند

بطریقی که $OA = 4$ و $OB = -2$ میباشد مطلوبست معادله دایره و مختصات مرکز و طول

شعاع آن

۳۳- دایره بر سه نقطه $A(1, 1)$ و $B(0, 2)$ و $C(2, 2)$ مرور میکند

معادله دایره و مختصات مرکز و طول شعاع آن را معلوم کنید

۳۴- دایره $x^2 + y^2 = 20$ و خط $y = x - 2$ مفروضند مطلوب است اولاً

مختصات نقطه تقاطع خط و دایره ثانیاً معادله مماس بر دایره فوق موازی با خط مفروض

۳۵- مطلوب است معادله دایره که مختصات مرکز آن $(1, 3)$ بوده و بر خط $3x + 4y + 7 = 0$

مماس باشد

۳۶- ثابت کنید که دایره $x^2 + y^2 - cmx + 2m - 2 = 0$ با زاویه m بر تمام دایره

m از دو نقطه ثابت مرور میکند و مختصات این دو نقطه را تعیین کنید

۳۷- دایره $x^2 + y^2 - cax - cby + c = 0$ مفروض است و دو نقطه

$A(x_0, y_0)$ و $P(x, y)$ را در سطح این دایره اختیار نموده و فرض میکنیم

M نقطه از خط AP باشد بطوریکه $\frac{MA}{MP} = -m$ باشد اولاً مطلوب است

مقادیر m و m' و m'' نظیر نقاط M' و M'' محل تقاطع خط AP با دایره فوق

ثانیاً ثابت کنید که مکان هندسی نقطه P مزدوج توافقی نقطه A نسبت به نقاط تقاطع دایره

مذکور با خط مار بر نقطه A خطی است مستقیم (این خط را قطبی A نسبت به دایره مینامند)

۳۸- اولاً بیضی معادله $9y^2 + 4x^2 = 36$ را رسم نمایید ثانیاً خط

$2y = mx + 5$ را فرض میکنیم مقدار m را بطوریکه یقین کنید که خط با بیضی

ماس باشد و فاصله مرکز بیضی را از این خط ماس حساب کنید

۳۹- بیضی بواسطه محور ا طول آن a و فاصله دو کانونش c مشخص است نقطه مانند M

در روی آن بفاصله معلوم m از یکی از دو کانون اختیار شده است مطلوبت محاسبه

فاصله نقطه M از مرکز و از دو محور بیضی

۴۰- محور ا طول بیضی a و فاصله کانونش c درست است از مرکز آن شعاع

r دایره رسم میکنیم تا بیضی را در دو یا چهار نقطه M قطع کند مطلوبت محاسبه اشعه

حاصل یکی از این نقاط و از روی دستور حاصل شرط امکان سنده را تحقیق کنید

۴۱- دو معادله $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ و $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ مفروضند اولاً

تعیین کنید که دو معادله نامیش چه خطوطی هستند ثانیاً مطلوبت حل و بحث دستگاه دو معادله

و تعیین آنکه چه رابطه بایستی مابین مقادیر a و b و p و q موجود باشد برای آنکه دو خط مماس

فوق ماس باشند ثالثاً در صورتیکه a و b و p و q مقادیر غیر مشخص داشته باشند

مطلوبت محاسبه مختصات نقطه M وسط خط MM' بنا بر آنکه M و M' محل تقاطع آنها باشد

۴۲- سهی معادله $y' = \pm px$ مفروض است اولاً بازنه $p = \pm 2$ آنرا

رسم کنید ثانیاً مطلوبت تعیین نقطه مانند M بر این سهی بطوریکه مجموع مرتبین فواصلش از رأس

و کانون مساوی مقدار معلوم k باشد

۴۳- در سهی $y' = \pm px$ وتر MM' بطول معلوم a و مابین کانون را اختیار نمود

قطعات FM و FN را بر حسب a و p حساب کنید

۴۴- سهمی معادله $y' = \sqrt{1-x}$ مفروض است دایره مرکز رأس سهمی و مار بر کانون

۴۵- را از اسم میانیسم تا سهمی را در دو نقطه M و M' قطع نماید مطلوبست فاصله M از کانون

۴۶- محور سهمی

۴۵- معادلات دو سهمی عبارتست از $y' = ax$ و $y' = bx$ که در آنها a و b

مختصات نقطه C از سطح دو محور سی باشد مطلوبست اولاً محاسبه مختصات نقطه دیگر D فصل

مشترک دو سهمی بر حسب a و b ثانیاً محاسبه ضریب زاویه C و اثبات آنکه زاویه C و D

ثابت می باشد

۴۶- سهمی معادله $y' = \sqrt{1-x}$ مفروض است اولاً فرض میکنیم نقطه M مختصات

x و y روی خطی موازی با محور سهمی حرکت کند تعیین کنید علامت $y' = \sqrt{1-x}$

چگونه تغییر میکند ثانیاً اگر فرض کنیم نقطه M در سطح دو محور حرکت کند مطلوبست ناحیه از سطح که اگر

نقطه M در آن واقع باشد عبارت $y' = \sqrt{1-x}$ مثبت بوده و یا آنکه منفی باشد ثالثاً

مطلوبست مختصات محل تقاطع خط $y = mx + n$ با سهمی و بحث در آن و تعیین معادله mx

بر سهمی برضرب زاویه m از روی بحث فوق رابعا نقطه مختصات x و y را در سطح دو محور

انتخاب میکنیم مطلوبست تشکیل معادله که ریشه های آن ضریب زاویه مماسهای موسوم از این

نقطه بر سهمی باشد (بحث)

۴۷- محوری مرکز تقارن منحنیات ذیل را معلوم کنید

$$x' + y' = R^2 \quad (x-1)^2 + (y+2)^2 = 16 \quad \frac{x'}{a'} + \frac{y'}{b'} = 1$$

$$4(x-2)^2 + 9(y+1)^2 = 1 \quad y' = 5x + 5 - y = (x+2)^2 + x - 3$$

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 5x + 4y - 1 = 0 \quad 2x^2 + 2xy \quad y^2 - 10x - 2y + 40$$

۴۸- نقطه مفروضه M بمختصات $x = 1 - 2$ و $y = 2 + 5$ مفروض است

مطلوبت معادله در رسم مکان نقطه M برگاده M تفسیر کند

۴۹- مختصات نقطه مستحکم بحسب زمان عبارتست از $x = 3.1 + 1$ و $y = 2.1 + 5$

مطلوبت معادله در رسم میران

۵۰- دو نقطه ثابت در روی OX مفروض است از این دو نقطه دو خط مرور نماید که در روی

۵۱- تقاطع سینا بینداز دو نقطه ثابت فوق دو خط بر خطوط مفروض عمود میکنیم مطلوبست مکان نقطه تقاطع این دو عمود

۵۲- مثلث متساوی الساقینی است که ارتفاع آن 50 میباشد خط 45 موازی

قاعده رسم میکنیم تا 50 را در نقطه P قطع کند مطلوبست مکان فصل مشترک OP

با AQ و OP با AN و 2 با AN

۵۳- مطلوبست مکان مراکز مربع مستطیهای محاط در مثلث مفروض

۵۴- دو محور قائم OX و OY و خط AB موازی OY مفروض است در روی

OY نقطه متغیر D در روی AB نقطه E را فرض میکنیم بطوریکه $EP = EC$

باشد مطلوبست مکان تصویر نقطه E بر روی BC

۵۵- مطلوبست مکان اواسط وترهای دایره که بر نقطه ثابتی مرور نمایند در حالیکه

اولاً نقطه داخل دایره ثانیاً در روی دایره ثالثاً در خارج دایره باشد

۵۵- دایره O بقطر AB و نقطه متغیر H در روی این دایره مفروض است دو دایره محیطیه مثلثات HOA و HOB را رسم میکنیم اولاً ثابت کنید که حاصل ضرب عرضهای مراکز P و Q این دو دایره مقداریت ثابت ثانیاً مطلوبت مکان فصل مشترک خطوط AP و BQ

۵۶- در روی عمود مرسومه از نقطه P در روی قطعه خط AA' نقطه H را فرض میکنیم بطریقی که نسبت $\frac{HP'}{PA \times PA'}$ مقدار ثابت باشد مطلوبت مکان نقطه H برگاه P در روی قطعه خط AA' تغییر مکان دهد و برگاه R و R' نقاط تقاطع خطوط HA و HA' با عمود مرسوم از O وسط AA' باشد ثابت کنید که حاصل ضرب $OR \times OR'$ مقداریت ثابت

۵۷- دو نقطه ثابت A و A' با فاصله $AA' = 2a$ و OY عمود منصف آن مفروض است از نقطه A' خط غیر مشخصی رسم میکنیم که OY را در نقطه B قطع کند نقطه A را به B وصل نموده و از نقطه A عمودی بر AB احسراج میکنیم تا $A'B$ را در نقطه H قطع کند مطلوبت مکان نقطه H

۵۸- فرض میکنیم OA و OB دو شعاع قائم دایره مفروض و CD نیم وتر متغیری موازی OA باشد مطلوبت مکان نقطه تقاطع خطوط OB و AC

۵۹- برگاه α و β مختصات نقطه مفروضه H واقع در سطح دو محور قائم باشد مطلوبت

مکان نقطه M برای آنکه دو خط :

$$ax - (b-1)y + 1 = 0$$

$$cx + 3y + 2 = 0$$

اولاً موازی ثانیاً متقاطع باشند

X ۶۰- معادلات دو خط عبارتست از :

$$(a+c)x + (a+3b+5)y + 3 = 0$$

$$(a+c)x - (2a+b-2)y - 2 = 0$$

که در آن a و b مختصات نقطه مفروضه M واقع در سطح دو محور قائم میباشند

مکان نقطه M برای آنکه اولاً دو خط فوق موازی ثانیاً منطبق باشند

۶۱- مطلوبست مکان نقاطی که مختصات آنها در سه معادله ذیل صدق نماید

$$x^2 + y^2 - 1 > 0 \quad x + y - 1 > 0 \quad y - x + \frac{1}{x} < 0$$

۶۲- مطلوب است مکان نقاطی که مختصات آنها در هر یک از روابط ذیل صدق نماید

$$(3x - 2y)(x - y + 1)(4x - 2y + 1) < 0$$

$$(x + y - 1)(2x - y + 1)(2x - y) > 0$$

$$(2x + y - 1)(x^2 + y^2 - 1) > 0$$

$$(y - x^2)(x^2 + y^2 - 1)(x^2 - y^2) > 0$$

$$(y - x^2)(x + y - 1)[x^2 - (y+1)^2] < 0$$

۶۳- نقطه M مختصات a و b مفروضه است مطلوبست مکان نقطه M بطریقی که نامتناهی

ویل همواره برقرار باشد $ax^2 - (a+b)x + a = 0$

۶۴- معادله درجه دوم

$$ax^2 - (a+b)x + a = 0$$

که در آن a و b مختصات نقطه مفروضه M واقع در سطح دو محور قائم میباشد مفروض است مطلوب است اولاً بحث در وجود علامت ریشه های آن بر حسب موضع نقطه M در سطح

دو محور ثانیاً مقایسه ریشه های آن با -1 و $+1$

۶۵- در روی محور x و در طرفین نقطه O دو نقطه A و A' را بطریقی فرض میکنیم

که $OA = OA' = a$ باشد و بعد در محیط نقطه O دو نقطه متغیر Λ و Λ' را که

بواسطه رابط $\frac{OA}{OA'} = \frac{O\Lambda}{O\Lambda'}$ یکدیگر بستگی دارند جدا نموده و فرض میکنیم

که نقطه P وسط $\Lambda\Lambda'$ و $OP = x$ باشد مطلوب است اولاً محاسبه قطعات OA و OA'

و $\Lambda\Lambda'$ بر حسب x ثانیاً در روی عمود مرسوم بر x از نقطه P طول $PM = \frac{a^2}{x}$

را جدا نموده نقطه M را به دو نقطه F و F' بنابر آنکه $OF = OF' = a$ باشد

وصل میکنیم مطلوب است محاسبه MF و MF' و همچنین محاسبه تفاضل آنها و از روی آن

تحقیق مکان نقطه M برگاه Λ و Λ' تغییر نماید

متغیر و تابع

۲۴ - متغیر - کستی را که بتواند مقادیر مختلفه اختیار کند متغیر مینامند

و عموماً آنرا بحروف اواخر الفبا مانند x و y و z نمایش میدهند

۲۵ - تابع - هرگاه مابین دو متغیر رابطه باشد بطریقی که تغییر یکی مستلزم

تغییر دیگری باشد یکی را تابع دیگری خوانند

مثلاً محیط دایره تابعی است از شعاع آن و سطح مربع تابعی است از طول ضلع آن

هرگاه متغیر y تابع متغیر x باشد آنرا بصورت ذیل بنویسند $y = f(x)$

ممکن است متغیری تابع چندین متغیر دیگر باشد مثلاً حجم بخار تابعی است از فشار

و درجه حرارت آن همچنین حجم ممتبسطیل تابعی است از سه بعد آن

هرگاه متغیر z تابع سه متغیر x و y و z باشد آنرا بصورت بنویسند

$$z = f(x, y, z)$$

در هر معادله چند مجهولی بصورت کلی $f(x, y, z, \dots) = 0$ هر یک از مجهولات

را میتوان تابع مجهولات دیگر فرض نمود مثلاً چون معادله $0 = x - y - z$ را

نسبت به y حل کنیم حاصل میشود $y = x - z$ و چنانکه ملاحظه میشود در معادله

آخر y را میتوان تابع x فرض نمود همچنین اگر معادله $0 = x - y - z$ را

رابطه z حل کنیم حاصل شود $4 - \frac{y}{4} - 3x = z$ که در آن z تابعی است از دو متغیر x و y

۳۶ - متغیری که به بینهایت میل کند - میگوید متغیر x میل میکند

بسمت $+\infty$ هرگاه مقادیر آن رفته رفته بزرگ شده و از هر عدد مثبت مفروض

بزرگتر گردد، همچنین میگوید متغیر x میل میکند بسمت $-\infty$ هرگاه مقادیر آن

رفته رفته کوچک شده و از هر عدد منفی کوچکی کوچکتر گردد و یا عبارت a از

مطلق آن از هر عدد مفروض بزرگتر گردد

حدود

۳۷ - تعریف حد - هرگاه a مقدار معلومی باشد میگوئیم a حد متغیر

x است یا x میل میکند بسمت a هرگاه $|a - x|$ از هر عدد مثبت

مفروضی کوچکتر گردد و یا عبارت a از $|a - x|$ میل کند بسمت صفر

مثلاً هرگاه متغیر x مرتباً مقادیر :

۱, ۹ , ۱, ۹۹ , ۱, ۹۹۹ , ۱, ۹۹۹۹ ,

و یا مقادیر ۲, ۱ , ۲, ۰۱ , ۲, ۰۰۱ , ...

را اختیار نماید میگوئیم x میل میکند بسمت ۲ و یا آنکه حد متغیر x عبارتست از ۲

چه ملاحظه میشود که $1, 999 \dots 1$ و یا $1, 000 \dots 1$ $2 - 1$ رفته از هر عدد مثبت مفروض کوچکتر شده و بنا بر این میل میکند نسبت صفر
 ۳۸ - خواص راجع بحد و د - خواص ذیل را راجع بحد و د همواره باید.

بمخاطر داشت

۱ - هرگاه دو متغیر همیشه با هم مساوی باشند و یکی از آنها نسبت حدی میل کند دیگری هم بهمان حد میل نماید

۲ - حد مجموع چندین متغیر که هر یک نسبت حدی میل نمایند عبارتست از مجموع
 حدود آنها

۳ - حد حاصل ضرب مقدار ثابتی در عبارتی که نسبت حدی میل نماید برابر است
 با حاصل ضرب مقدار ثابت در حد عبارت متغیر

۴ - حد حاصل ضرب دو یا چند متغیر که هر یک نسبت حدی میل نمایند عبارتست
 از حاصل ضرب حدود آنها

۵ - حد نسبت دو متغیر که هر یک نسبت حدی میل نمایند عبارتست از نسبت
 حدود آنها

۶ - حد قوه هر متغیر که نسبت حدی میل کند عبارتست از قوه حد

۷- حدیث هر متغیر که نسبت حدی میل نماید عبارتست از ریشه حد

۳۹- مقدار بعضی توابع هرگاه متغیر نسبت حدی میل کند-

در تابع $y = 2x + 3$ فرض میکنیم x رفته رفته بزرگ شده و میل کند

نسبت ۵ یا آنکه رفته رفته کوچک شده و میل کند نسبت ۵ در اینصورت مقادیر

تغیر تابع مرتباً عبارت میگردد :

$x_1 = 4,9$	$y_1 = 12,8$	$x_1 = 5,1$	$y_1 = 13,2$
$x_2 = 4,99$	$y_2 = 12,98$	$x_2 = 5,01$	$y_2 = 13,02$
$x_3 = 4,999$	$y_3 = 12,998$	$x_3 = 5,001$	$y_3 = 13,002$

چنانکه از جدول فوق ملاحظه میشود هرچه که x میل کند نسبت ۵ تفاضل $y_1 - 11,3$

میل میکند نسبت صفر یعنی y میل میکند نسبت ۱۳ بنا بر این حد y هرگاه x میل

کند نسبت ۵ عبارتست از ۱۳

چون بطریقی مشابه با فوق استدلال کنیم نتیجه میشود :

۱- هرگاه صورت کسری میل کند نسبت صفر و مخارج آن مخالف صفر باشد

حد کسر مساوی صفر میباشد

مثلاً در تابع $y = \frac{x-1}{x+5}$ چون فرض میکنیم x میل کند به سمت $+\infty$ مخرج میل میکند به سمت $+\infty$ و صورت میل میکند به سمت صفر و در این صورت حد کسر مساوی صفر میگردد.

۲- هرگاه مخرج کسری میل کند به سمت صفر و صورت آن مخالف صفر باشد کسر میل میکند به سمت بینهایت. حال بنا بر آنکه صفر مخرج حد مقدار مثبت یا منفی باشد کسر بینهایتی است بعلامت صورت و یا مخالف علامت صورت و در صورتیکه صفر مخرج حد مقدار مثبت و حد مقدار منفی هر دو باشد کسر بینهایتی است بعلامت مثبت و در صورتیکه مخرج میل میکند به سمت $+\infty$ و یا بعبارة اخری کسر منقلص میگردد.

مثلاً در تابع $y = \frac{x-1}{(x-5)^2}$ چون فرض کنیم x میل کند به سمت $+\infty$ مخرج میل میکند به سمت $+\infty$ و صورت میل میکند به سمت $+\infty$ ولی چون مخرج باز از مقادیر $x = 5 \pm \epsilon$ همواره مثبت است لذا علامت کسر باز از $x = 5$ بعلامت صورت و بنا بر این مثبت میباشد بطوریکه کسر فوق باز از $x = 5$ برابر است با $+\infty$.

همچنین در تابع $y = \frac{x-1}{(x+5)^2}$ هرگاه فرض کنیم x میل کند به سمت $+\infty$

مخرج میل میکند نسبت صفر و صورت میل میکند نسبت ۵-۶ ولی چون مخرج بازار
 مقادیر $x = -5 \pm 4$ همواره مثبت است لذا علامت کسر بازار $x = -5$
 علامت صورت و بنا بر این منفی میباشد بطوریکه کسر فوق بازار $x = -5$
 برابر است با $-\infty$

بالاخره در تابع $y = \frac{x-1}{x-5}$ چون فرض کنیم x میل کند نسبت
 ۵ صورت میل میکند نسبت ۴ و مخرج میل میکند نسبت صفر ولی چون مخرج بازار
 $x = 5 + 4$ مثبت و بازار $x = 5 - 4$ منفی میباشد لذا کسر فوق بازار
 $x = 5$ برابر میگردد با $\pm \infty$

در چنین حالتی میگویند تابع $y = \frac{x-1}{x-5}$ بازار $x = 5$ منفض و مقدار آن
 برابر است با $\pm \infty$

۳- کسر یک نقطه صورت آن میل کند نسبت بینهایت میل میکند نسبت بینهایت
 مثلاً در تابع $y = \frac{x-3}{5}$ چون فرض کنیم $x = \pm \infty$ باشد
 مقدار $y = \pm \infty$ خواهد بود و همچنین در تابع $y = \frac{x-3}{5}$ بازار $x = \pm \infty$
 مقدار $y = \pm \infty$ میباشد و بالاخره در تابع $y = \frac{x^2-4}{5}$
 بازار $x = \pm \infty$ مقدار $y = +\infty$ میباشد

۳- کسر که فقط مختصر آن میل کند نسبت به نهایت میل میکند نسبت صفر

مثلاً در تابع $y = \frac{1}{x}$ هرگاه فرض کنیم $x = \pm \infty$ باشد
 $y = 0$ میگردد

۴- حد کثیر الجمله از x هرگاه در آن x میل کند نسبت
 $\pm \infty$ در اینصورت حد کثیر الجمله به نهایت میگردد

مثلاً چون در تابع $y = 2x^3 - 4x + 1$

فرض کنیم x میل کند نسبت به ∞ چون x^3 را فاکتور مشترک قرار دهیم

حاصل میشود $y = x^3 (2 - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3})$ که در آن هرگاه $x = \pm \infty$

فرض شود $\frac{1}{x^2}$ و $\frac{1}{x^3}$ مساوی صفر شده و بنا بر این مقدار $y = \pm \infty$ میگردد

همچنین بطریقی مشابه با فوق معلوم میشود که مقدار تابع $y = -2x^3 - 4x + 1$

باز $x = \pm \infty$ عبارتست از $y = \mp \infty$

و بالاخره مقدار تابع $y = 5x^4 + x^2 - 1$ باز $x = \pm \infty$ عبارتست

از $+\infty$

صور مبهمه

رفع ابهام و تعیین مقدار حقیقی عبارات مبهمه

۴۱- صورت $\frac{0}{0}$ - ممکن است بازا، مقداری از x صورت
و مخرج کسری هر دو مساوی صفر میگردد و در این صورت کسر بصورت $\frac{0}{0}$ درمیآید
چون کسر فوق را مساوی با q فرض کنیم حاصل میشود $q = \frac{0}{0}$ و بنا بر
خاصیت تقسیم میتوان نوشت $0 \times q = 0$

حال از عبارت اخیر معلوم میشود که برای q هر مقداری بطور اختیار میتوان
فرض نمود بطوریکه برای کسر $\frac{0}{0}$ مقدار معین و مشخص نمیتوان تعیین داد و در اینجا
میگویند کسر فوق مبهم میباشد

۴۲- رفع ابهام از صورت $\frac{0}{0}$ * - هرگاه فرض کنیم تابع $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$
بازاء $x = a$ بصورت $\frac{0}{0}$ درآید اغلب صورت و مخرج هر دو دارای فاکتور
کمی از قوای $x - a$ میباشند بطوریکه چون در صورت و مخرج قوای $x - a$
را فاکتور قرار دهیم حاصل میشود :

$$y = \frac{(x-a)^m \times f_1(x)}{(x-a)^n \times \varphi_1(x)}$$

و چون کسر فوق را بساده ترین صورت تبدیل کنیم کسر جدیدی بدست میآید

که بازاء، جمیع مقادیر x با کسر مفروض معادل میباشد و لذا بطور قرار داد مقدار
این کسر را بازاء $x = a$ مقدار حقیقی کسر مفروض نامیده و این عمل را
رفع ابهام گویند

* قاعده دیگری نیز از راه استعمال مشتقات برای رفع ابهام از صورت فوق در این کتاب بیان خواهیم کرد

مثال ۱ - مطلوبست محاسبه مقدار حقیقی تابع

$$y = \frac{5x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4x + 3}$$
 بازار $x = 1$

تابع فوق را میتوان مرتباً بصورت ذیل نوشت :

$$y = \frac{5x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x-1)(5x+2)}{(x-1)(x-3)} = \frac{5x+2}{x-3}$$

و چون مقدار کسر اخیر بازار $x = 1$ برابر است با $\frac{7}{2}$ - لذا مقدار حقیقی تابع
 مفروض نیز بازار $x = 1$ مساوی $\frac{7}{2}$ - خواهد بود

مثال ۲ - مطلوبست مقدار حقیقی تابع

$$y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 - 8x^2 + 61x - 18}$$
 بازار $x = 3$

تابع فوق را مرتباً بصورت ذیل بنویسیم :

$$y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 - 8x^2 + 61x - 18} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)^2(x-2)} = \frac{x+1}{(x-3)(x-2)}$$

که مقدار آن بازار $x = 3$ عبارت میگردد از $\pm \infty$

مثال ۳ - مطلوبست مقدار حقیقی تابع

$$y = \frac{x-4}{3 - \sqrt{x^2-7}}$$
 بازار $x = 4$

برای رفع ابهام صورت و مخرج کسر را در مزدوج ضرب نموده ساده میکنیم تا حاصل شود :

$$y = \frac{x-4}{3 - \sqrt{x^2-7}} = \frac{(x-4)(3 + \sqrt{x^2-7})}{(3 - \sqrt{x^2-7})(3 + \sqrt{x^2-7})} =$$

$$= \frac{(x - 4x^3 + \sqrt{x^2 - 7})}{16 - x^2} = \frac{-(3 + \sqrt{x^2 - 7})}{x + 4}$$

که مقدار آن بازار $x = 4$ عبارتست از $-\frac{3}{4} = -\frac{6}{8}$

۴۳ - صور مبهمه دیگر $0 \times \infty$ و $\frac{\infty}{\infty}$ و $\infty - \infty$

صورت فوق نیز قابل تبدیل بصورت $\frac{0}{0}$ بوده و بنا بر این مبهم میباشد زیرا

اولاً فرض میکنیم $y = f(x) \times \varphi(x)$ باشد که در آن بازار $x = a$

$f(x) = 0$ و بازار $x = a$ $\varphi(x) = \infty$ و بنا بر این y بصورت

$$y = \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} \quad 0 \times \infty \text{ باشد حال چون } y \text{ را بصورت :}$$

بنویسیم ملاحظه میشود که بازار $x = a$ صورت و مخرج هر دو صفر و بنا بر این y

بصورت $\frac{0}{0}$ درمیآید

ثانیاً فرض میکنیم $y = \frac{\varphi(x)}{f(x)}$ باشد که در آن بازار $x = a$ صورت

و مخرج هر دو مساوی ∞ گردد حال چون y را بصورت :

$$y = \frac{\frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$$

بنویسیم ملاحظه میشود که صورت و مخرج کسر y بازار $x = a$ هر دو صفر و بنا بر این کسر

فوق بصورت $\frac{0}{0}$ میباشد

ثالثاً فرض میکنیم $y = f(x) - \varphi(x)$ باشد که در آن بازار $x = \infty$ باشد
 $f(x) = \infty$ و $\varphi(x) = \infty$ باشد حال y را مرتباً بصورت ذیل میویسیم:

$$y = f(x) - \varphi(x) = \frac{[f(x)]^2 - [\varphi(x)]^2}{f(x) + \varphi(x)} = \frac{\frac{[f(x)]^2 - [\varphi(x)]^2}{[f(x)]^2 \times [\varphi(x)]^2}}{\frac{f(x) + \varphi(x)}{[f(x)]^2 \times [\varphi(x)]^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{[f(x)]^2} - \frac{1}{[\varphi(x)]^2}}{\frac{1}{f(x) \times [\varphi(x)]^2} + \frac{1}{[\varphi(x)]^2 \times f(x)}}$$

که بازار $x = \infty$ بصورت $\frac{0}{0}$ درمیآید

۴۴ - رفع ابهام از صورت فوق - مثال ۱ - مطلوبست مقدار

حقیقی تابع $y = (x^2 - 4) \times \frac{x - 5}{x^2 - 4x + 3}$ بازار $x = \infty$

چنانکه ملاحظه میشود عبارت فوق بازار $x = \infty$ بصورت $\frac{\infty}{\infty}$ درمیآید

حال برای رفع ابهام عبارت فوق را مرتباً بصورت ذیل میویسیم:

$$y = \frac{(x+3)(x-2)(x-5)}{(x-1)(x-3)} = \frac{(x+3)(x-5)}{x-1}$$

که مقدار آن بازار $x = 2$ عبارتست از ۱۲ -

مثال ۲ - مطلوبست مقدار حقیقی $y = \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 1}$ بازار $x = \infty$

گسرفوق بازار $x = \infty$ بصورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ درمیآید حال برای رفع

ابهام صورت و مخرج کسر را بر x تقسیم میکنیم تا حاصل شود:

$$y = \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{1}{x^2}}$$

که حد آن بازاء $x = \infty$ برابر میگرد و با $\frac{1}{4}$

قاعده - بطور کلی برای محاسبه مقدار حقیقی نسبت دو کثیرالاجمله از x که اغلب بازاء $x = \infty$ بصورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ درمیآید قاعده آنست که صورت و مخرج کسر را بر بزرگترین قوت x که در صورت و مخرج موجود است تقسیم نمود در اینصورت سه حالت ممکن است اتفاق افتد:

۱- هرگاه درجه صورت و مخرج کسر مساوی باشد مقدار حقیقی کسر عبارت

میگردد از نسبت ضرایب بزرگترین نماینده x مثلاً مقدار حقیقی $y = \frac{5x^3 - 7}{3x^3 + 1}$

بازاء $x = \infty$ عبارتست از $\frac{5}{3}$

۲- هرگاه درجه صورت از مخرج کمتر باشد مقدار حقیقی کسر صفر میگردد مثلاً

مقدار حقیقی $y = \frac{x^2 - 2}{5x^3 + 1}$ بازاء $x = \infty$ عبارتست از صفر

۳- بالاخره هرگاه درجه صورت از مخرج زیادتر باشد مقدار حقیقی کسر

میگردد مثلاً مقدار حقیقی کسر $y = \frac{2x^2 - 5}{x + 1}$ بازاء $x = \pm \infty$ عبارتست از

مثال ۳ - مطلوبست مقدار حقیقی تابع $y = 2x - \sqrt{4x^2 + x}$

بازار $x = \infty$

چنانکه ملاحظه میشود عبارت فوق بازار $x = \infty$ بصورت $\infty - \infty$ درمیآید
حال برای رفع ابهام عبارت مفروض را یک مرتبه در مزدوج خود ضرب و یک مرتبه بر آن
تقسیم نموده و بر وفق حالت قبل عمل میکنیم تا حاصل شود :

$$y = \frac{(2x - \sqrt{4x^2 + x})(2x + \sqrt{4x^2 + x})}{2x + \sqrt{4x^2 + x}} = \frac{-x}{2x + \sqrt{4x^2 + x}} = \frac{-1}{2 + \sqrt{4 + \frac{1}{x}}}$$

که حد آن بازار $x = \infty$ عبارتست از $y = -\frac{1}{4}$

مسائل

۶۶ - مقدار عبارات ذیل را حساب کنید :

$y = 2x - 1$ بازار $x = \pm \infty$

$y = -3x + 4$ بازار $x = \pm \infty$

$y = -2x^2 + 5$ بازار $x = \pm \infty$

$y = 5x^3 + 1$ بازار $x = \pm \infty$

$y = \frac{2x-3}{x+1}$ بازار $x = -1$ ۶۷

$y = \frac{x+1}{x^2}$ بازار $x = 0$

$$y = \frac{x^2 - 5}{x^3}$$

باز

$$x = 0$$

$$y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

باز

$$x = \sqrt{1}$$

$$y = \frac{x^2 - \sqrt{x} + 1}{x^2 + 10x - 5}$$

باز

$$x = 1$$

-81

$$y = \frac{x^4 + 2x^2 - x - 1}{x^2 + x - 5}$$

باز

$$x = 1$$

$$y = \frac{x^3 - 10x + 1}{x^2 - 5x + 10}$$

باز

$$x = 1$$

$$y = \frac{2x^2 + 10x - 1}{x^3 + 15x^2 - 19x + 10}$$

باز

$$x = \frac{1}{2}$$

$$y = 1 - \frac{x + 1 + \frac{x+1}{x-5}}{x + \frac{x^2}{x-5}}$$

باز

$$x = 1$$

-89

$$y = \frac{x+1}{x^2-15} - \frac{x+1}{x(x-5)}$$

باز

$$x = 1$$

$$y = \frac{x^3 - 1}{x + 1}$$

باز

$$x = -1$$

$$y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$$

باز

$$x = 0$$

-10

= 0

$$y = \frac{x-1}{x^2-x-5} - \frac{1}{x^2-x-5}$$

باز

$$x = 1$$

$$y = \frac{5x^2 + 1}{x-1}$$

باز

$$x = 1$$

(2A)

(10)

$$y = \frac{\omega x^r - \lambda x^r + \mu x + r}{rx^r - x + r} \quad \text{1) 2) 3) } \quad x = \pm \infty$$

$$y = \frac{\omega x^r - \lambda x + \mu}{rx^r - x + r} \quad \text{1) 2) 3) } \quad x = \pm \infty$$

$$y = \frac{(rx - r)^r (rx + v)^r}{(rx - r)^r (\omega x^r + 1)} \quad \text{1) 2) 3) } \quad x = \pm \infty$$

$$y = rx - \sqrt{x^r - x + 1} \quad \text{1) 2) 3) } \quad x = \pm \infty \quad -V1$$

$$y = \frac{x + r\sqrt{x}}{r\sqrt{x} + rx} \quad \text{1) 2) 3) } \quad x = \pm \infty$$

$$y = \sqrt{x^r - rx - 1} - \sqrt{x^r - rx + r} \quad \text{1) 2) 3) } \quad x = \pm \infty$$

$$y = x - 1 + \sqrt{rx^r + x - r} \quad \text{1) 2) 3) } \quad x = \pm \infty$$



خطوط مجانب

۴۵ - تقریف - خطی را نسبت بشاخه منحنی مجانب گویند هرگاه فاصله نقطه واقع در روی منحنی از خط میل کند نسبت صفر هرگاه نقطه در روی منحنی منتهیات دور شود

۱- مجانب موازی x'

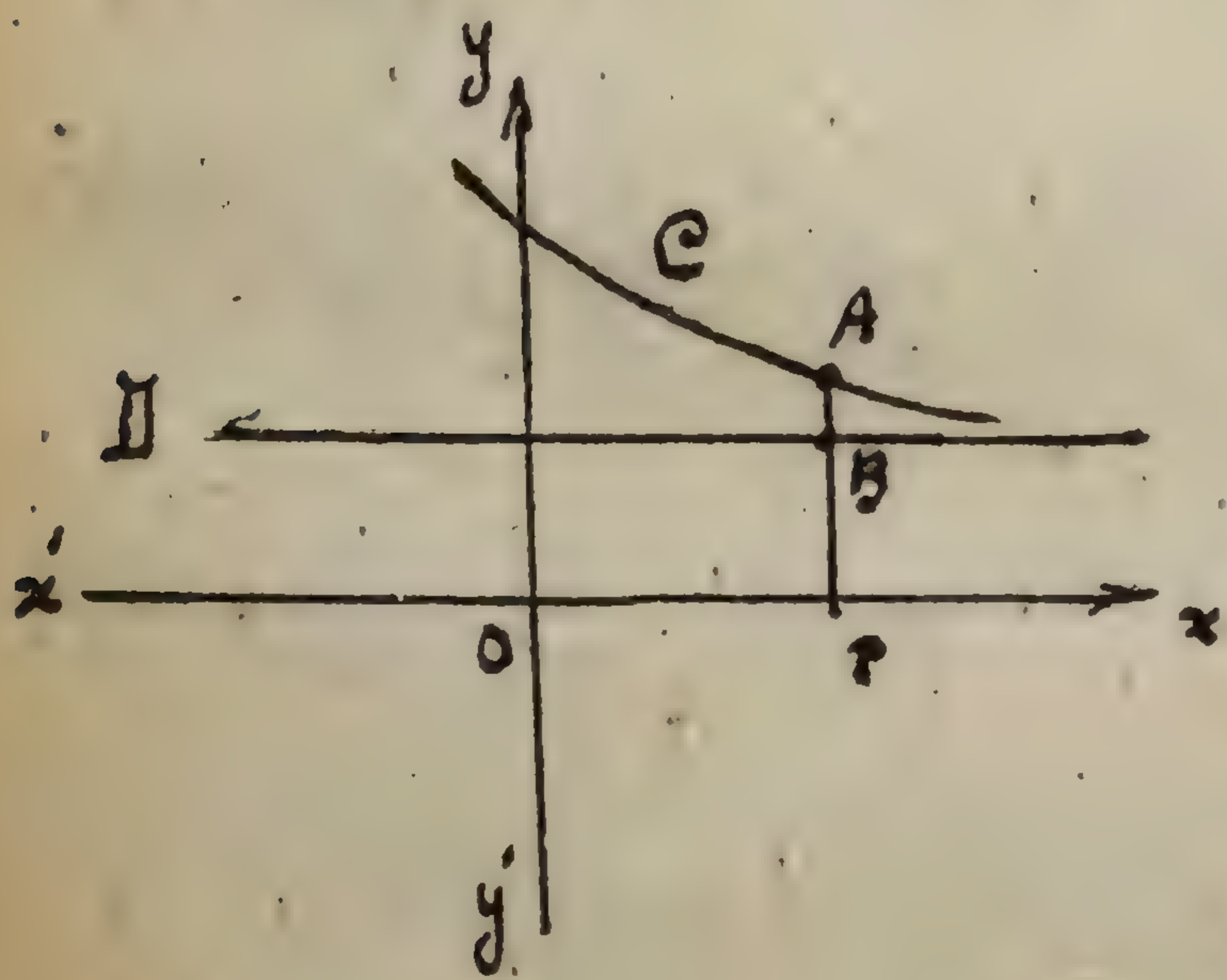
فرض میکنیم منحنی \odot نمایش تغییرات تابع $y = f(x)$ و خط \parallel مجانب موازی

بمحور x' باشد در اینصورت بموجب تقریف BA میل میکند نسبت صفر هرگاه

نقطه A در روی منحنی منتهیات

دور شود بعبارة آخری وقتی

x میل کند نسبت ∞ ولی چون



$$BA = PA - PB$$

بنابر این PA میل میکند نسبت

PB عرض خط مجانب هرگاه x میل کند نسبت منتهیات بنا بر این اگر تابعی بازا

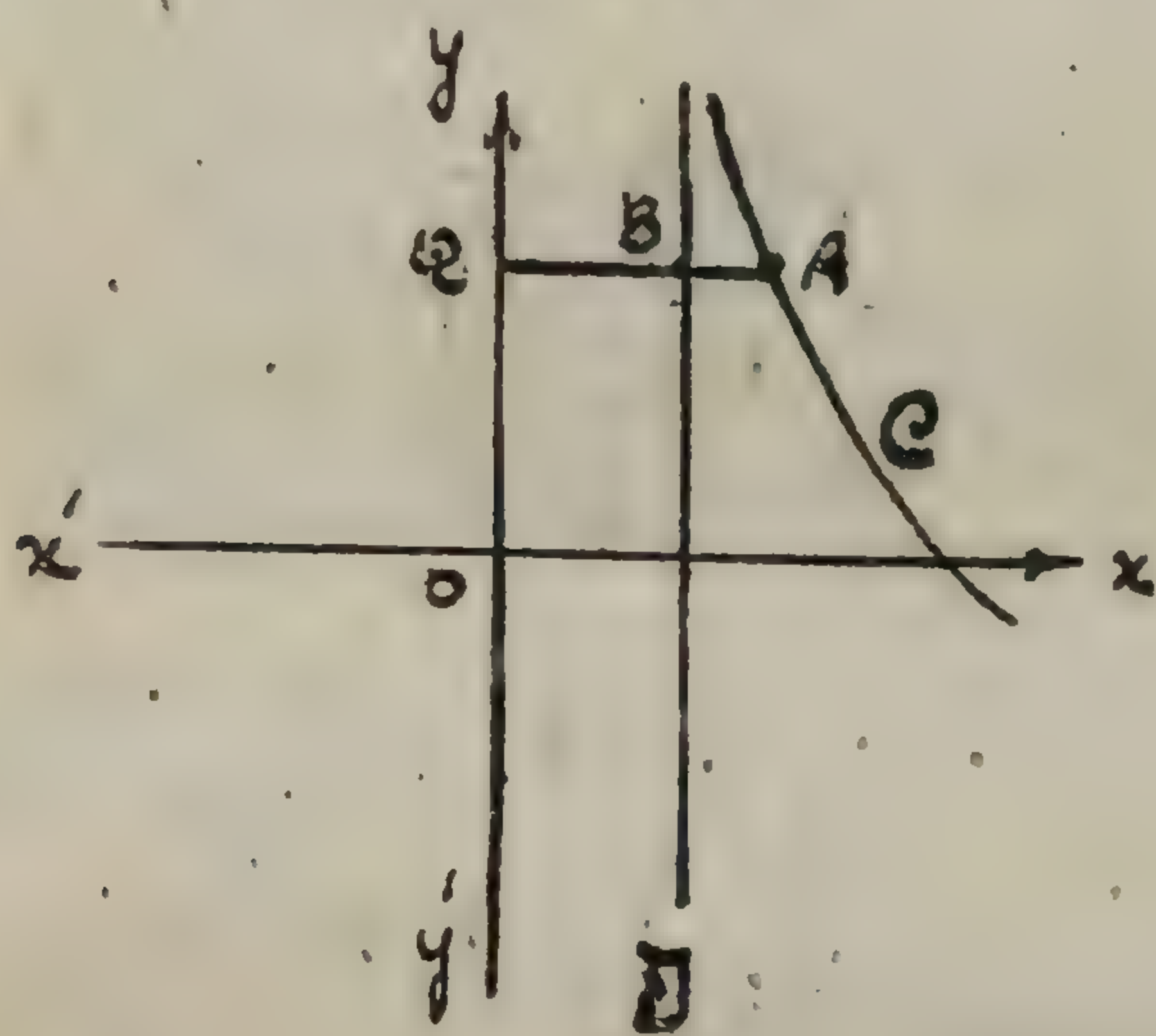
$x = \infty$ دارای حدی باشد آن حد عرض خط مجانب موازی با محور x' خواهد بود

مثال - در تابع $y = \frac{x-1}{x+1}$ چون فرض کنیم x میل کند نسبت ∞

y میل میکند نسبت ۲ بنا بر این در تابع فوق خط $y = 2$ بجانب موازی محور x می باشد

۲- بجانب موازی $y'y$

فرض میکنیم منحنی C نمایش تغییرات تابع $y = f(x)$ و خط Q بجانب موازی محور $y'y$ باشد در این صورت مطابق تعریف BA میل میکند نسبت صفر برگاه نقطه A در روی منحنی مبنایت دور شود و یا آنکه عرض آن میل کند نسبت مبنایت



ولی چون ملاحظه کنیم که

$$\overline{BA} = \overline{QA} - \overline{QB}$$

بنابر این \overline{QA} یعنی طول منحنی

میل میکند نسبت QB یعنی

طول خط بجانب برگاه

y میل کند نسبت ∞ بطوریکه چون در تابع $y = f(x)$ باز $y = \infty$ x

دارای حدی باشد آن حد طول خط بجانب موازی با محور $y'y$ می باشد

مثال- در تابع $y = \frac{x-1}{x+1}$ چون فرض کنیم y میل کند نسبت

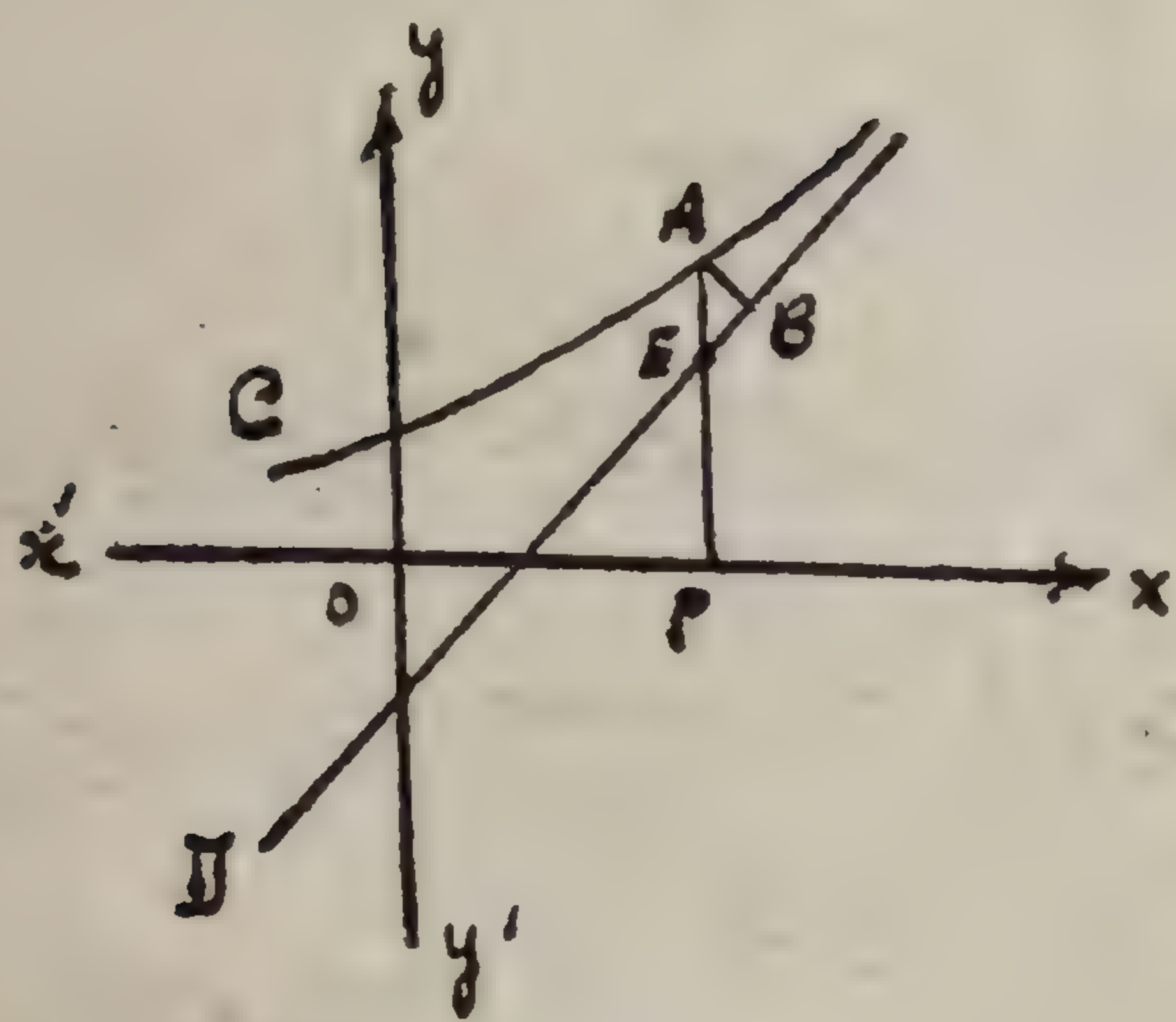
۱- مقدار y میل میکند نسبت ∞ بنا بر این خط $x = -1$ بجانب منحنی فوق

موازی با محور $y'y'$ خواهد بود

۳- مجانب غیر موازی با دو محور

فرض میکنیم منحنی C نمایش تغییرات تابع $y = f(x)$ و خط L معادله

$$y_1 = mx + n \quad \text{مجانب غیر موازی}$$



با دو محور باشد بموجب تعریف

AB میل میکند نسبت صفر هرگاه

نقطه A در روی منحنی بینهایت

دور شود معبارة آخری AB میل

میکند نسبت صفر هرگاه x میل کند نسبت بینهایت

واضح است که چون AB میل کند نسبت صفر بده نیز میل میکند نسبت صفر

ولیکن $\overline{EA} = \overline{PA} - \overline{PE} = y - y_1$ یعنی تفاضل عرض منحنی و خط مستطائر

بیک طول میل میکند نسبت صفر و قیگه x میل کند نسبت بینهایت

$$y_1 = mx + n$$

حال برای تعیین معادله خط مجانب

بنا بر آنچه گفتیم ملاحظه میشود که $y = (mx + n)$ میل میکند نسبت صفر هرگاه

x میل کند نسبت بینهایت لذا چون تفاضل فوق را مساوی ϵ قرار دهیم

حاصل میشود

$$4 - (mx + n) = 4$$

و از آنجا $m = \frac{4}{x} - \frac{n}{x} - \frac{4}{x}$ و چون فرض کنیم x میل کند به سمت

∞ دو جمله اخیر میل میکند به سمت صفر و مقدار n یا ضریب زاویه خط مجانب

از روی دستور ذیل حساب میشود :

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{4}{x} \right|$$

همچنین برای بدست آوردن عرض از مبدا خط مجانب از رابطه $4 - (mx + n) = 0$

حاصل میشود $n = 4 - mx - 4$ که چون x میل کند به سمت ∞ حد ۴

صفر و بنابراین مقدار n از دستور ذیل بدست میآید :

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} |4 - mx|$$

مثال - مطلوبست معادله خط مجانب غیر موازی با دو محور در تابع

$$y = \frac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}}$$

بر وفق آنچه گفتیم حاصل میشود :

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}} \right| = 1$$

و همچنین :

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} - x \right|$$

و چون عبارت اخیر باز $x = \infty$ بصورت مبهم درسیاید لذا برای رفع ابهام
آزما مرتباً بصورت ذیل تبدیل میکنیم :

$$y = \frac{x \sqrt{x+1} - x \sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}} = \frac{x(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2})}{\sqrt{x-2}} =$$

$$\frac{x(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}) \times (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2})}{\sqrt{x-2}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2})} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - x - 2}} = \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}} =$$

که حد آن باز $x = \infty$ عبارتست از $\frac{3}{4}$ بنابراین معادله خط بجانب غیر یواری

$$y_1 = x + \frac{3}{4} \quad \text{با دو محور در تابع مندرج عبارت میگردد}$$

۴۶ - بطور کلی در توابعی که بصورت $y = \frac{f(x)}{q(x)}$ باشند هرگاه فرض

کنیم درجه صورت m و درجه مخبر n و خارج قسمت صورت بر مخبر $q(x)$

و باقیانده $R(x)$ باشد تابع را میتوان بصورت ذیل نوشت :

$$y = Q(x) + \frac{R(x)}{q(x)} \quad \text{و چون فرض کنیم} \quad y_1 = Q(x) \quad \text{باشد این معادله}$$

مجاانب منحنی فوق میباشد زیرا تفاضل :

$$y - y_1 = Q(x) + \frac{R(x)}{q(x)} - Q(x) = \frac{R(x)}{q(x)}$$

میل میکند نسبت صفر هرگاه x میل کند به سمت ∞

حال از مقایسه درجه محل صورت و مخبر تابع مفروض دو حالت ذیل تشخیص داده میشود :

اولاً $m < n+1$ در این صورت $Q(x)$ اکثر از درجه اول بوده و خط

$y_1 = Q(x)$ بجانب مستقیم میباشد

ثانیاً $m > n+1$ در این صورت $Q(x)$ اقلاً از درجه دوم $y_1 = Q(x)$

بجانب منحنی تابع مفروض میباشد

مثال ۱- مطلوبست معادله خط بجانب غیر موازی با دو محور در تابع

$$y = \frac{x^2}{x+1}$$

چون صورت را بر مخرج تقسیم کنیم خارج قسمت عبارت میگیرد و از $x-1$ باین

خط $y_1 = x-1$ بجانب منحنی میباشد

مثال ۲- مطلوبست معادله بجانب منحنی تابع $y = \frac{x^3}{x-1}$

چون صورت را بر مخرج تقسیم میکنیم خارج قسمت خواهد بود از

$x^2 + x + 1$ باین منحنی $y_1 = x^2 + x + 1$ بجانب منحنی تابع

مفروض میباشد

مسائل

۵۲- معادلات بجانب منحنی های ذیل را معلوم کنید :

$$y = \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{1}{x+2}$$

$$y = \frac{x-3}{2x+5}$$

(18)

(92)

$$y = \frac{x^r + 1}{x}$$

$$y = \frac{x^r + 1}{x^r - 1}$$

$$y = \frac{x^r}{1 - x + x^r}$$

$$y = \frac{x^r - 1}{x^r + x + 1}$$

$$y = \frac{(rx - 1)^r}{x^r + rx - r}$$

$$y = \frac{(x - 1)^r}{(rx - r)^r}$$

$$y = \frac{-x}{(x - 1)(x + 1)}$$

$$y = \frac{(x - r)^r (x + 1)}{rx^r (x - 1)}$$

$$y = \frac{x^r}{(x^r - 1)(x^r - r)}$$

-18

$$y = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$$

$$y = x\sqrt{\frac{x}{a-x}}$$

$$y = x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$$

$$y = \frac{x\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$$

$$y = \sqrt{\frac{ax+b}{a'x+b'}}$$

$$y = \frac{r}{r\sqrt{9-x^2}}$$

-18

$$y = \frac{x^r}{1-x}$$

$$y = \frac{(x^r + 1)^r}{x + r}$$

$$y = \frac{x^r (x + 1)^r}{x^r + x - r}$$

$$y = \frac{(x+1)^r (x-1)^r}{x}$$

$$y = a^r + \frac{x^r}{a^r - x}$$

$$y = x^r - 1 + \frac{1}{x}$$

اقسام تابع

۴۷- تابع معین - تابع $y = f(x)$ را بازار $x = x_1$ معین

گویند هرگاه بجای x در تابع x_1 را قرار دهیم مقدار معینی برای y

بدست آید مثلاً تابع $y = 2x - 1$ بازار جمع مقادیر x معین میباشد

بر خلاف تابع $y = \sqrt{x}$ که بازار مقادیر مثبت x دارای مقدار

میشود فقط بازار مقادیر $x \geq 0$ معین میباشد

۴۸- تابع اتصالی و تابع انفصالی - تابعی در فاصله a و b

اتصالی است هرگاه به x هر مقدار در فاصله a و b قرار دهیم برای y مقدار

مشخصی بدست آید مثلاً تابع $y = 2x - 5$ و $y = 2x - 5$ بازار جمع مقادیر

x اتصالی میباشد برخلاف تابع $y = \frac{x-1}{x-2}$ بازار $x = 2$

و همچنین تابع $y = 2qx$ بازار قوسهای $x = 0, 1, 2, \dots$ انفصالی و

y نظیر آنها عبارت است از \dots

۴۹- تابع صعودی و نزولی - هرگاه در تابع $y = f(x)$ جهت

تغییرات x و y یکی باشد تابع را صعودی و الا نزولی گویند مثلاً تابع $y = 2x - 1$

* مقصود از فاصله a و b کلیه اعداد مفروضه مابین a و b میباشد که خود a و b را هم شامل خواهد بود

همیشه صعودی است چه اگر x را از مقدار اولی مفروض ترقی در سیم مقدار نظیر
آن نیز ترقی میکند و اگر تنزل در سیم مقدار نظیر y آن نیز تنزل نماید برخلاف
تابع $y = 1 - x$ همیشه نزولی است چه اگر x ترقی کند مقدار y نظیر
تنزل نماید و اگر x تنزل کند مقدار y نظیر ترقی نماید

تابع ممکن است بازار جمع مقادیر x صعودی یا نزولی باشد مثلاً تابع $y = 2x - 1$

بازار جمع مقادیر x صعودی و تابع $y = 1 - x$ بازار جمع مقادیر x

نزولی است ولی اغلب تابع در فاصله معینی صعودی و در فاصله معین دیگر نزولی

میشود مثلاً تابع $y = x^2 - 4x + 3$ بازار مقادیر $x < 2$ نزولی و بازار

مقادیر $x > 2$ صعودی میباشد

۵- ماکزیمم و مینیموم - بگویند تابع $y = f(x)$ بازار $x = x_0$

ماکزیموم است هرگاه تابع بازار مقادیر کمی کوچکتر از آن صعودی بوده و بازار

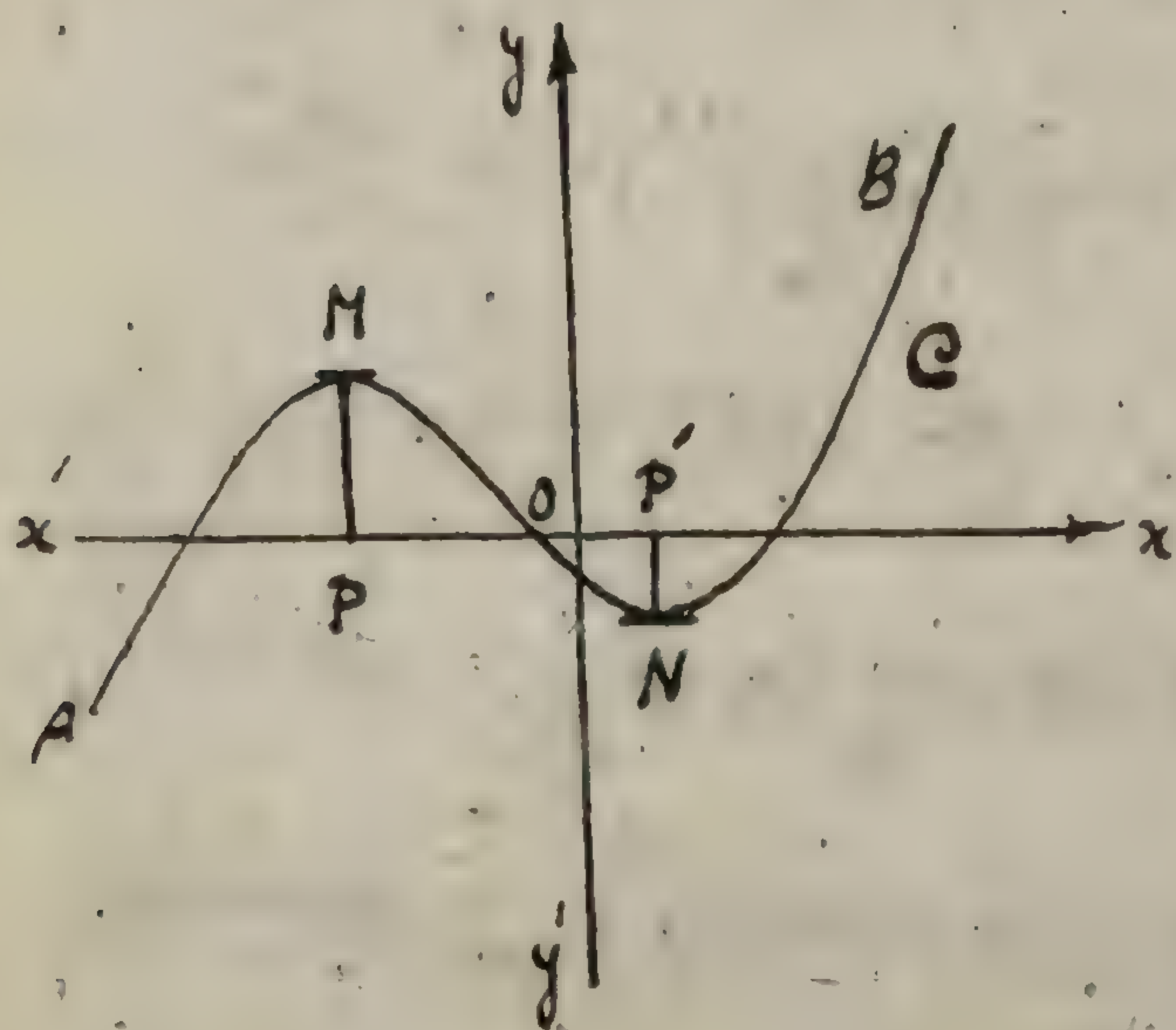
$x = x_0$ نزولی گردد همچنین بگویند تابع $y = f(x)$ بازار $x = x_0$

مینیموم است هرگاه تابع بازار مقادیر کمی کوچکتر از آن نزولی بوده و بازار

$x = x_0$ صعودی میگردد

همواره ممکن است از روی معادله تابعی تحقیق نمود که تابع در چه فاصله صعودی

در چه فاصله نزولی و بازار چه مقدار x ماگزیم یا مینیم است بالعکس میتوان
از روی منحنی نمایش تغییرات تابع نیز مطالب فوق را تحقیق نمود مثلاً منحنی
نمایش تغییرات تابعی است که در



شاخه AM صعودی و در شاخه

MN نزولی و در شاخه NB

مجدداً صعودی میباشد و بنابراین

بر وفق تعریف در نقطه M بازار

$x = \overline{OP}$ دارای ماگزیمومی

سادگی \overline{PM} و در نقطه N بازار $x = \overline{OP'}$ دارای مینومی سادگی \overline{PN} باشد

مشتقات

۱- نموده - هرگاه در تابع $y = f(x)$ ابتدا برای x مقدار

اولی مانند $x_1 = a$ فرض نموده و $y_1 = f(a)$ نظیر این مقدار

را برای y حساب کنیم و بعد برای x مقدار ثانوی مانند $x_2 = b$

فرض نموده و $y_2 = f(b)$ نظیر این مقدار x را نیز برای y حساب کنیم

میگویند برای x نتوی حاصل شده است سادگی مقدار ثانوی منهای مقدار

اولی و یا $a-b$ و برای y نیز که تابع آنست نمودی حاصل شده است برابر
با $f(a) - f(b)$ که عموماً آنها را به Δx و Δy نمایش میدهند بنابراین:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = b - a$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(b) - f(a)$$

۵۲ - تعریف مشتق - هرگاه فرض کنیم تابع $y = f(x)$ در فاصله

a و b اتصال یافته و x مقدار اولی x در فاصله a و b باشد

چون $x = x_0$ نمودی مانند Δx داده و نمود تغییرش را برای تابع Δy

فرض کنیم حد نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را هرگاه Δx میل کند نسبت صفر مشتق تابع

$y = f(x)$ بازار مقدار اولی x یعنی x میماند بنابراین مشتق هر تابع

بازار مقدار یعنی از x عبارت است از حد نسبت نمود تابع نمود تغییر هرگاه نمود متغیر

میل کند نسبت صفر و آنرا عموماً بصورت ذیل مینویسند

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

قاعده ۵ - بطور کلی بر وفق تعریف فوق قاعده ذیل برای محاسبه مشتق توابع

بدست میآید :

۱ - مقداری از x را که مقصود محاسبه مشتق تابع بازار آنست مقدار اولی

x قرار میدیم و مقدار اولی تابع را نظیر آن حساب میکنیم

۲- به x نمونی مانند x میدیم و y یعنی نمون نظیر آنرا برای تابع تعیین

مینمایم

۳- نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را تشکیل داده آنرا ساده میکنیم

۴- حد نسبت فوق را هرگاه x میل کند به سمت صفر حساب میکنیم این حد

مشتق تابع خواهد بود

اینک برای نمونه مثال ذیل را حل میکنیم :

مثال - مطلوبست محاسبه مشتق تابع $y = x^2$ بازار $x=1$ و $x=3$

بر وفق قاعده فوق مرتباً میتوان نوشت :

مشتق بازار $x=3$

$$x_1 = 3$$

$$y_1 = 9$$

$$x_2 = 3 + h$$

$$y_2 = (3+h)^2 = 9 + 6h + h^2$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = h$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 = 6h + h^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right| = 6$$

مشتق بازار $x = -1$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = -1 + h$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = h$$

$$y_1 = -1$$

$$y_2 = (-1 + h)^2 = 1 - 2h + h^2$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 = -2h + h^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2h + h^2}{h} = -2 + h$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right| = -2$$

بنابر این مشتق تابع $y = x^2$ بازار $x = 3$ عبارت از ۶ و بازار $x = -1$ عبارت از ۲-

بطوریکه ملاحظه میشود مشتق تابع $y = f(x)$ عموماً تابع دیگریست از x که آنرا یکی از صور ذیل نمایش میدهند

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

حال برای بدست آوردن معادله کلی مشتق تابع $y = x^2$ کافیت که مقدار اولی x را همان x فرض نموده بترتیب فوق عمل نماییم تا حاصل شود:

مشتق بازار $x = x$

$$x_1 = x$$

$$x_2 = x + h$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = h$$

$$y_1 = x^2$$

$$y_2 = (x + h)^2 = x^2 + 2hx + h^2$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 = 2hx + h^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + b \quad \text{منتهی} \quad \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right| = 2x \quad \Delta x \rightarrow 0$$

بطوریکه مشتق تابع $y = x^2$ عبارتست از $y' = 2x$ که در آن
چون بجای x هر مقدار را قرار دهیم مشتق تابع بازار همان مقدار بدست میآید

تغییر مهندسی مشتق

۵۳- تابع $y = f(x)$ و منحنی C نمایش تغییرات آنرا اختیار نموده

در روی آن نقطه $M(x, y)$ فرض میکنیم بنابراین $OP = x$ و

$PM = y$ خواهد بود

حال اگر بنا بر تعریف مشتق به x

متممی مانند $PP' = \Delta x$ بدسیم

برای y نیز متممی حاصل میشود

برابر با $P'H' - PM = NM = \Delta y$

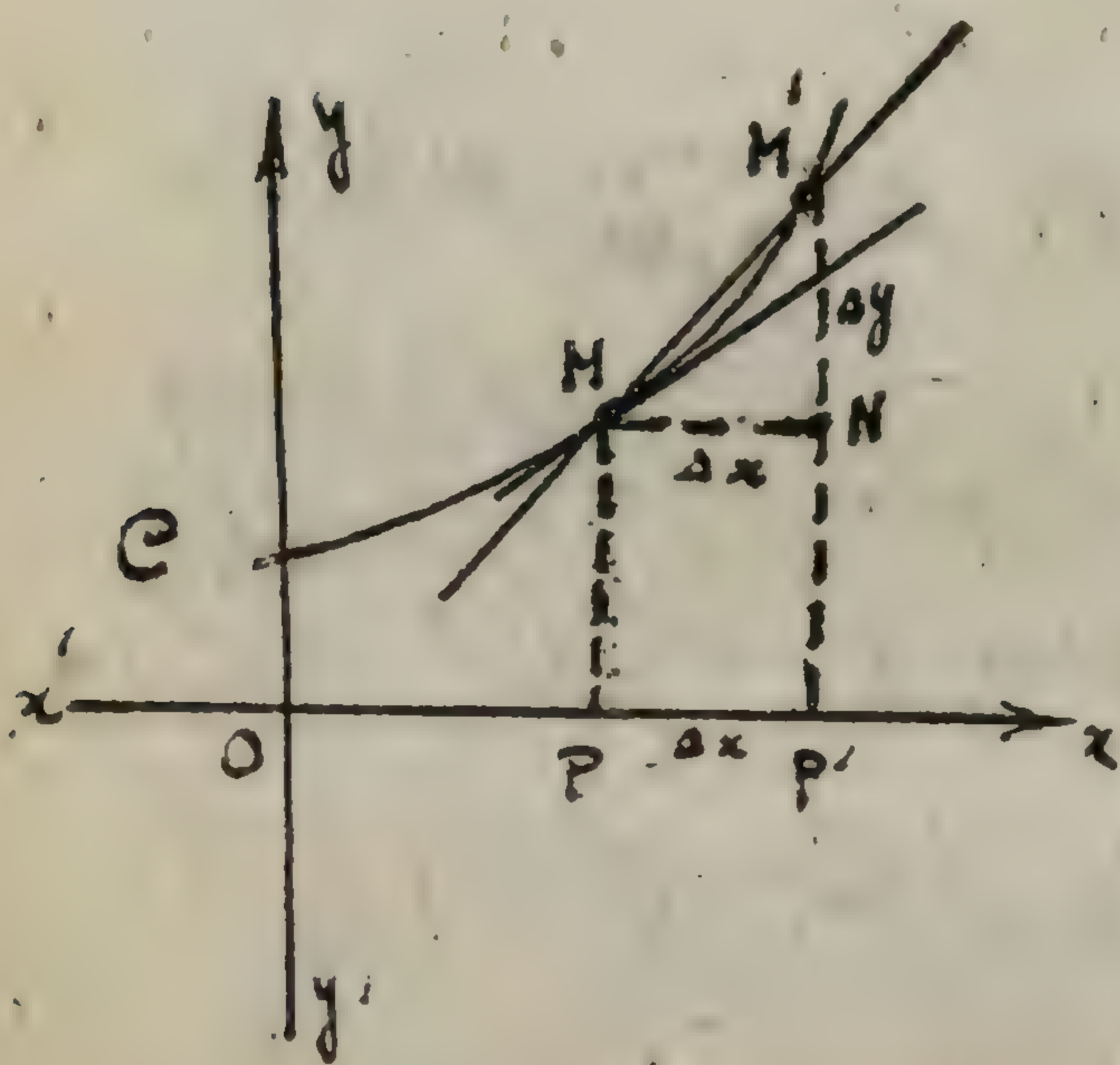
بطوریکه نقطه جدیدی مانند M'

در روی منحنی بدست میآید مختصات $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ حال چون Δy را

به نسبت درسیم حاصل میشود $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{M'N}{MN} = \widehat{M'HN}$

بنابراین تغییر مهندسی نسبت فوق عبارتست از ضریب زاویه خط قاطع $M'M$ حال

اگر فرض کنیم Δx میل کند به سمت صفر نقطه P میل میکند به سمت M'



نیز در روی منحنی میل میکند نسبت M و قاطع MM' در حول نقطه H دوران
 نمایند تا وقتی که x بخود صفر برسد قاطع MM' بوضع مناسب در نقطه
 M قرار بگیرد و چون نسبت $\frac{4y}{4x}$ همواره ضریب زاویه قاطع MM' میباشد
 لذا حد آن که بنا بر تعریف مشتق تابع بازاء طول نقطه M میباشد ضریب زاویه حد
 قاطع MM' و یا مماس بر نقطه M خواهد بود بطوریکه مشتق تابع را بازاء مقدار
 یعنی از x میتوان تعبیر بضریب زاویه مماس بر نقطه از منحنی بطول x نمود
 مورد استعمال - مطلوبست معادله خطی که از نقطه $x=3$ و $y=1$
 بر منحنی $y=x^2$ بر آن مماس گردد

نقطه مفروضه چون در روی منحنی است لذا محققات آن عبارت خواهد بود
 از (۳ و ۹) و بنا بر آنچه میدانیم صورت کلی خطوط مار به این نقطه عبارتست از
 $y - 9 = m(x - 3)$ و چون بجای m مشتق تابع را بازاء $x=3$
 که عبارتست از y قرار دهیم حاصل میشود $y - 9 = 6(x - 3)$

$$y = 6x - 9 \quad \text{و یا}$$

مماس بر مشتق

۵۴ - مشتق مقدار ثابت - مشتق مقدار ثابت مساویست با صفر

چه برگاه فرض کنیم $y = c$ باشد چون ضریب x مساوی صفر است

بنابراین بازاء هر مقدار Δx مقدار Δy نظیر مساوی صفر بوده

ولذا نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ و حد آن نیز صفر می باشد

۵۵- مشتق $y = x$ - مشتق $y = x$ عبارت از $y' = 1$ زیرا

چون بر طبق تعریف مشتق عمل کنیم حاصل می شود :

$$x_1 = x$$

$$x_2 = x + h$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = h$$

$$y_1 = x$$

$$y_2 = x + h$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 = h$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right| = y' = 1$$

۵۶- مشتق $y = x^m$ - مشتق $y = x^m$ عبارت از

$y' = mx^{m-1}$ زیرا بنا بر تعریف مشتق :

$$x_1 = x$$

$$x_2 = x + h$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = h$$

$$y_1 = x^m$$

$$y_2 = (x + h)^m$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 = (x + h)^m - x^m =$$

$$(x+h-x) [(x+h)^{m-1} + x(x+h)^{m-2} + \dots + x^{m-1}] =$$

$$h [(x+h)^{m-1} + x(x+h)^{m-2} + \dots + x^{m-1}] =$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = (x+h)^{m-1} + x(x+h)^{m-2} + \dots + x^{m-1}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right| = y' = x^{m-1} + x^{m-1} + \dots + x^{m-1} = mx^{m-1}$$

مثال - بنابر دستور فوق مشتق $y = x^2$ عبارت از $y' = 2x$

و مشتق $y = x^3$ عبارت از $y' = 3x^2$ و همچنین مشتق $y = x^4$

عبارت از $y' = 4x^3$

۵۷ - مشتق مجموع چندین تابع - هرگاه فرض کنیم z و u و v

هر یک تابعی از x باشند و $y = z + u + v$ باشد $y' = z' + u' + v'$

خواهد بود

زیرا اگر به x نموی مانند Δx بدسیم برای z و u و v و y که هر یک

تابعی از x میباشند نموی حاصل شود برابر با Δz و Δu و Δv و Δy

بطوریکه میتوان مرتباً نوشت :

$$x_1 = x$$

$$y_1 = z + u + v$$

$$x_2 = x + \Delta x$$

$$y_2 = (z + \Delta z) + (u + \Delta u) + (v + \Delta v)$$

$$x_2 - x_1 = \Delta x$$

$$y_2 - y_1 = \Delta y = \Delta z + \Delta u + \Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right| = y' = z' + u' + v'$$

تجین است اثبات حکم برای چندین تابع

مثال - مطلوبست صورت کلی مشتق تابع $y = x^4 + x^3 + x - 1$

بنابر آنچه گفتیم مشتق تابع فوق عبارت میگردد از $y' = 4x^3 + 3x^2 + 1$

۵۸ - مشتق حاصل ضرب دو تابع - مشتق $y = u \times v$

$$y' = v u' + u v'$$

زیرا چون بر طبق تعریف مشتق عمل کنیم حاصل میشود :

$$x_1 = x$$

$$y_1 = u \times v$$

$$x_2 = x + \Delta x$$

$$y_2 = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$

$$x_2 - x_1 = \Delta x$$

$$y_2 - y_1 = \Delta y = v \Delta u + u \Delta v + \Delta u \Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v \times \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \times \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u \times \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right| = y' = v u' + u v'$$

مثال - مشتق $y = x^2(x+1)$ عبارتست از :

$$y' = 2x(x+1) + x^2 = 2x^2 + 2x$$

۵۹- مشتق حاصل ضرب تابعی در مقدار ثابت - فرض میکنیم مقدار

ثابت a تابعی از x و $y = ax$ باشد در این صورت مشتق y

$$y' = au'$$

زیرا چون از تابع $y = ax$ بر طبق دستور فوق مشتق استخراج

$$y' = au' + ua'$$

$$y' = au'$$

مثال - بر طبق دستور فوق مشتق $y = 2x$ عبارت از

$$y' = 2 \text{ و مشتق } y = -2x^2 \text{ عبارت از } y' = -4x \text{ و مشتق}$$

$$y = \frac{1}{2}x^5 \text{ عبارت از } y' = \frac{5}{2}x^4 \text{ و مشتق } y = ax^2 + bx + c \text{ و مشتق}$$

$$y' = 2ax + b$$

۶۰- مشتق حاصل ضرب سه تابع - فرض میکنیم $y = \frac{1}{2}xuv$

باشد حال اگر u و v را یک جمله فرض نموده از عبارت فوق مشتق استخراج

کنیم حاصل میشود :

$$y' = \frac{1}{2}x'uv + (uv)' \times \frac{1}{2}$$

و چون بجای $(u \times v)'$ مقدار آنرا قرار دهیم نتیجه میشود :

$$y' = z' \times u \times v + u' \times z \times v + v' \times z \times u$$

مثال - مشتق $y = 2x^2(3x-1)(x^2+1)$ عبارت است از

$$y' = 4x(3x-1)(x^2+1) + 2x^2(x^2+1) + 4x^2(3x-1)$$

۶۱- مشتق حاصل ضرب چندین تابع - چون بطریقی مشابه

بافوق عمل کنیم نتیجه میشود :

مشتق حاصل ضرب چندین تابع برابر است با مجموع حاصل ضربهای مشتق هر یک از آنها در حاصل ضرب توابع دیگر

۶۲- مشتق نسبت دو تابع - مشتق $y = \frac{u}{v}$ عبارت است از

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

زیرا چون بر طبق تعریف مشتق عمل کنیم حاصل میشود :

$$x_1 = x$$

$$y_1 = \frac{u}{v}$$

$$x_2 = x + \Delta x$$

$$y_2 = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

$$x_2 - x_1 = \Delta x$$

$$y_2 - y_1 = \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} =$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \times \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \times \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

$$\frac{v \times \Delta u - u \times \Delta v}{\Delta x (v + \Delta v)}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right| = y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

مثال - مشتق $y = \frac{ax+b}{a'x+b'}$ بر وفق دستور فوق عبارت خواهد بود

$$y' = \frac{a(a'x+b') - a'(ax+b)}{(a'x+b')^2} = \frac{ab' - ba'}{(a'x+b')^2} \quad \text{از}$$

تبصره - مشتق $y = \frac{a}{v}$ که در آن a مقداریت ثابت عبارت

$$\text{از} \quad y' = \frac{-av'}{v^2} \quad \text{زیرا مطابق دستور فوق چون مشتق} \quad y = \frac{a}{v} \quad \text{را}$$

حساب کنیم حاصل میشود :

$$y' = \frac{va' - av'}{v^2} = \frac{-av'}{v^2}$$

مثال - مشتق $y = \frac{1}{x}$ عبارت میگردد از $y' = -\frac{1}{x^2}$

۶۳ - مشتق قوه یک تابع - مشتق $y = x^m$ عبارت است از

$$y' = mx^{m-1}$$

حالت اول - فرض میکنیم m عدد صحیح مثبتی باشد در این صورت y را

میتوان بصورت ذیل نوشت :

$$y = \overbrace{u \times u \times u \times \dots \times u}^{m \text{ مرتبه}}$$

که چون از آن مطابق دستور سابق مشتق استخراج کنیم حاصل میشود :

$$y' = \overbrace{u' \times u^{m-1} + u' \times u^{m-1} + \dots + u' \times u^{m-1}}^{m \text{ مرتبه}} = m u' \times u^{m-1}$$

حالت دوم - فرض میکنیم m عدد صحیح و منفی باشد در این صورت هرگاه

$$y = u^m = u^{-m'} = \frac{1}{u^{m'}} \quad m = -m' \text{ باشد حاصل میشود}$$

که چون از آن مشتق استخراج کنیم نتیجه میشود

$$y' = \frac{-m' \times u' \times u^{m'-1}}{u^{2m'}} = -m' \times u' \times u^{-m'-1} = m u' \times u^{m-1}$$

حالت سوم - فرض میکنیم m عدد کسری مثبت یا منفی و مثلاً مساوی $\frac{p}{q}$

$$y = u^m = u^{\frac{p}{q}} \text{ باشد در این صورت تابع را میتوان بصورت ذیل نوشت}$$

و از آنجا $y^q = u^p$ که چون از طرفین مشتق استخراج کنیم حاصل میشود:

$$q \times y' \times y^{q-1} = p \times u' \times u^{p-1}$$

$$y' = \frac{p u' \times u^{p-1}}{q \times y^{q-1}} = \frac{p u' \times u^{p-1}}{q \times u^{\frac{p}{q}(q-1)}} = \text{و از آنجا}$$

$$\frac{p}{q} u' \times u^{\frac{p}{q}-1} = m u' \times u^{m-1}$$

مثال - مشتق $y = (x^2 - 1)^3$ باید استوار فوق عبارت خواهد بود

$$y' = 6x(x^2 - 1)^2$$

از: $4x$ - مشتق ریشه یک تابع - مشتق $y = \sqrt{x}$

عبارت است از

$$y' = \frac{u'}{m \sqrt[m]{u^{m-1}}}$$

برای می توان نوشت :

$$y = \sqrt[m]{u} = u^{\frac{1}{m}}$$

که چون بر وفق دستور سابق مشتق آنرا حساب کنیم حاصل میشود :

$$y' = \frac{1}{m} \times u' \times u^{\frac{1}{m}-1} = \frac{1}{m} \times u' \times u^{\frac{-(m-1)}{m}} = \frac{u'}{m \sqrt[m]{u^{m-1}}}$$

مثال - مشتق $y = \sqrt[3]{x^2 - x}$ عبارت است از :

$$y' = \frac{2x-1}{3 \sqrt[3]{(x^2-x)^2}}$$

حالت مخصوص - بر وفق دستور فوق مشتق $y = \sqrt{u}$ عبارت

$$y' = \frac{u'}{2 \sqrt{u}}$$

مثال - مشتق $y = \sqrt{x}$ عبارت است از $y' = \frac{1}{2 \sqrt{x}}$ ۶۵ - مشتق تابع تابع - فرض میکنیم $y = f(u)$ و $u = \varphi(x)$ باشد در اینصورت y را نسبت به متغیر x تابع تابع گویند چه y تابعی از u و u تابعی است از x حال اگر بخواهیم مشتق y را نسبت به متغیر x حساب کنیم ملاحظه میکنیم که نظیر Δx نمو x برای u نموی مانند Δu و برای y نیز نموی مانند Δy

حاصل میشود ولی همواره میتوان نوشت :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

که چون در آن فرض کنیم dx میل کند به صفر حاصل میشود :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \quad \text{و یا} \quad y'_x = y'_u \times u'_x$$

مثال - فرض میکنیم $u = \sqrt{x^2+1}$ و $y = u^3$ باشد در این صورت

مشتق y بحسب متغیر u عبارت میگردد از :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = 3u^2 \times \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{3x(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} = 3x\sqrt{x^2+1}$$

۴۶ - مشتقات متوالی یا تباعج - هرگاه مشتق تابع $y = f(x)$

را حساب کنیم حاصل میشود $y' = f'(x)$ که آنرا مشتق اول تابع

گویند حال اگر از مشتق فوق نیز که عموماً تابعی است از x مجدداً مشتق

استخراج کنیم حاصل میشود $y'' = f''(x)$ که آنرا مشتق ثانی تابع

مفروض میانسند بهینطور است مشتق سوم و چهارم

مشتق اول تابع y را بصورت $\frac{dy}{dx}$ و مشتق ثانی را بصورت $\frac{d^2y}{dx^2}$

و مشتق سوم را بصورت $\frac{d^3y}{dx^3}$ مینویسند و قس علیهذا

مثال - مشتقات متوالی $y = (x-1)^3$ مرتباً عبارتست از :

$$y' = \frac{dy}{dx} = 3(x-1)^2 \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 6(x-1)$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = 6$$

$$y^{IV} = \frac{d^4y}{dx^4} = 0$$

۴۷ - مشتق تابعی که نسبت به x حل نشده است - فرض میکنیم

بصورت $x^4 + y^4 - 4xy + y - 1 = 0$ باشد در این صورت

برای محاسبه مشتق y بحسب تغییر x از طرفین رابطه فوق مشتق حساب میکنیم

تا حاصل شود:

$$4x + 4y \times \frac{dy}{dx} - 4x - 4y + \frac{dy}{dx} = 0$$

که چون $\frac{dy}{dx}$ را حساب کنیم حاصل میشود:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{4y - 4x}{4y - 4x + 1}$$

$dy = differential$

مورد استعمال مشتق در محاسبه مقدار حقیقی بعضی عبارات

۴۸ - قضیه - مقدار حقیقی کسر $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ که بازار $x=a$ بصورت

$\frac{0}{0}$ میباشد برابر است با مقدار کسر $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ بازار $x=a$

چون $f(a)$ و $\varphi(a)$ عادی صفر میباشند یا بر این نسبت

فوق را میتوان مرتباً بصورت ذیل نوشت:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}}$$

حال اگر فرض کنیم x میل کند نسبت a صورت و مخرج کسر فوق میل میکند
 نسبت $f'(a)$ و $\varphi'(a)$ یعنی مشتق صورت و مخرج کسر و چون
 $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ همواره با کسر فوق مساویست لذا در حد نیز باید یک مساوی
 خواهند بود

مثال - مطلوبست محاسبه مقدار حقیقی کسر $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 3x + 1}$ بازا $x=1$
 چون مشتق صورت و مخرج کسر فوق را حساب نموده بیکدیگر نسبت دهیم حاصل
 میشود $\frac{2x-5}{2x-3}$ که مقدار آن بازا $x=1$ برابر است با ۳ -

مسائل

۷۵ - مشتق توابع ذیل را بطور مستقیم و از روی تعریف مشتق حساب کنید

$y = -2x + 1$	بازاء	$x = 3, 0, a$
$y = \frac{x}{1-x}$	بازاء	$x = -1, \sqrt{2}, \frac{1}{10}$
$y = \frac{(x-1)^2}{x}$	بازاء	$x = \frac{1}{10}, 1+\sqrt{2}, a-1$ -۷۶
$y = \sqrt{x}$	بازاء	$x = 4, \frac{1}{9}, \frac{1}{2}$
$y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$	بازاء	$x = a^2, -a, \frac{a}{2}$
$y = \frac{x-a}{(x+a)^2}$	بازاء	$x = 1+a, \sqrt{a}$
$y = \frac{x(x-a)^2}{a}$	بازاء	$x = 0, a, 2a$

۷۷- مشتق توابع ذیل را حساب کنید :

$$y = x^r + x^s - rz$$

$$y = x^r - rx^r + 1$$

$$y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{r}{r}x^r + 1$$

$$y = \frac{x^r - 5x + r}{r}$$

$$y = (1+x)(1-x)$$

$$y = (1+x)(1-x)(1+rx)(1-rx)$$

$$y = (x-r)^r$$

$$y = x(rx-1)^r \quad - ۷۸$$

$$y = x^r(1+x)^r(1-x)^r$$

$$y = (x+1)^r(x-1)^r(x^r+1)$$

$$y = \frac{x(x^r-1)^r}{r} - \frac{1}{x}$$

$$y = (a-x)(a+x)$$

$$y = (a-b)x^r - ax + b$$

$$y = ax^r + bx^r + cx + d$$

$$y = \frac{1}{1+x^r}$$

$$y = \frac{a-x}{x}$$

$$y = \frac{x-r}{x+r} \quad - ۷۹$$

$$y = \frac{ax+b}{a'x+b'}$$

$$y = \frac{x+1}{x^r}$$

$$y = \frac{x^r}{x-\omega}$$

$$y = \frac{(x-r)^r}{(x+r)^r}$$

$$y = \frac{x(ax+b)^r}{ax-b}$$

$$y = \frac{x^r - rx^r}{\omega - x^r}$$

$$y = \frac{x^r - 9}{x^r + 12x + 11}$$

$$y = \frac{rx+1}{rx^r + rx - 1}$$

$$y = \frac{x(x-1)}{(x+1)(x+r)}$$

$$y = x + \sqrt{1+x^r}$$

$$y = x - \sqrt{1-x^r}$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{a^r - x^r}} \quad - ۸۰$$

$$y = \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} + 1} - x\sqrt{1-x^r}$$

$$y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$$

$$y = x\sqrt{\frac{x}{a-x}}$$

$$y = x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$$

$$y = \frac{x^r}{(1-x^r)^{\frac{r}{r}}}$$

$$y = \sqrt{\frac{ax^r + bx + c}{a'x^r + b'x + c'}}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{a^r - x^r}} - \sqrt{a^r - x^r}$$

$$y = \sqrt{\frac{rx^r + 1}{x^r + 1/x + 9}}$$

$$y = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$$

$$y = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}} \quad - 11$$

$$y = \sqrt{\frac{x(x-2)}{x^2 - 4x + 3}}$$

$$y = x + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$y = \sqrt{\frac{x(x-1)^3}{x+1}}$$

$$y = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$$

$$y = \frac{\sqrt{x^2 + a} + x}{\sqrt{x^2 + a} - x} + \frac{\sqrt{x^2 + a} - x}{\sqrt{x^2 + a} + x}$$

۱۲ - مطلوبست محاسبه مقدار حقیقی کسرهای ذیل از راه استمال مشتق

$$\frac{x^6 - 3x + 2}{x^6 - 9x + 5}$$

$$\text{بازاء } x = 1$$

$$\frac{x^6 - 9x + 5}{x^6 - 11x + 15}$$

$$\text{بازاء } x = 5$$

$$\frac{11x^6 + 2x^5 - 6x + 1}{11x^6 + 10x^5 - 11x + 2}$$

$$\text{بازاء } x = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x^6 - 2x^5 + 2x^2 - 2x + 1}{x^6 - 2x^5 + x^2}$$

$$\text{بازاء } x = 1$$

موارد استعمال مشتق در تعیین ماکزیم و

مینیموم توابع

۶۹ - قضیه - مشتق تابع صعودی مثبت و مشتق تابع

نزولی منفی است

اولاً هرگاه فرض کنیم تابع $y = f(x)$ بازار مقداری از x صعودی

باشد مشتق آن بازار این مقدار x مثبت می باشد چه با تقریف تابع صعودی

نظیر x مثبت y مثبت و نظیر x منفی y منفی خواهد بود بطوریکه نسبت

$\frac{dy}{dx}$ همواره مثبت و حد آن نیز که مشتق تابع است مثبت می باشد

ثانیاً هرگاه فرض کنیم تابع $y = f(x)$ بازار مقداری از x نزولی باشد

مشتق تابع بازار این مقدار x منفی می باشد زیرا با تقریف تابع نزولی نظیر

x مثبت y منفی و نظیر x منفی y مثبت می باشد بطوریکه نسبت

$\frac{dy}{dx}$ همواره منفی و حد آن نیز که مشتق تابع است منفی می باشد

نتیجه - با ملاحظه آنچه که راجع تغییر مبنای مشتق بیان نمودیم نتیجه میشود

که زاویه حادثه مابین مماس بر نقطه از منحنی در شاخه صعودی با جهت مثبت محور

× حادّه و زاویه حادّه مابین ماس نزلقه از منحنی در شاخه نزولی با جهت مثبت محور × منفی خواهد می باشد

۷. - مورد استعمال قضیه فوق - بنا بر قضیه فوق همواره

ممکن است بواسطه تحقیق علامت مشتق تابعی معلوم نمود که تابع منفرجه در چه فاصله صعودی و در چه فاصله نزولی است چه در هر فاصله که مشتق مثبت است تابع صعودی و در هر فاصله که مشتق منفی است تابع نزولی میباشد

مثال ۱ - مشتق تابع $y = x^2 - 4$ عبارتست از $y' = 2x$ که همیشه

مثبت است بنا بر این تابع فوق بازار جمع مقادیر × صعودی است

مثال ۲ - مشتق تابع $y = x^2 - 1$ عبارتست از $y' = 2x$ که همیشه

منفی است لذا تابع فوق بازار جمع مقادیر × نزولی است

مثال ۳ - مشتق تابع $y = x^3 - 4x^2 + 4x - 4$ عبارتست از $y' = 3x^2 - 8x + 4$ که بازار

$y' = 0$ صفر و بازار $y' < 0$ منفی و بازار $y' > 0$ مثبت میباشد

بنا بر این تابع منفرجه بازار مقادیر $y' < 0$ نزولی و بازار مقادیر $y' > 0$ صعودی خواهد بود

صعودی خواهد بود

۷۱ - ماکزیموم و مینیموم - بنا بر تعریف هرگاه تابعی صعودی بود

و بازار $x = x_0$ نزولی گردد و میگویند تابع مزبور بازار $x = x_0$ ماکزیمم
 میباشد همچنین هرگاه تابعی نزولی بوده و بازار $x = x_0$ صعودی گردد میگویند
 تابع مزبور بازار $x = x_0$ مینیموم میباشد

با ملاحظه قضیه فوق معلوم میشود که مقادیری از x که بازار آنها تابع ماکزیموم
 یا مینیموم است مقادیری میباشند که مشتق بازار آنها تغییر علامت میدهد و بر
 حسب آنکه از مثبت منفی گردد تابع ماکزیمم و یا از منفی مثبت گردد تابع مینیموم میباشند
 بطوریکه برای تعیین ماکزیمم و مینیموم تابع کافیت معلوم کنیم که بازار چه مقادیر
 x مشتق تغییر علامت میدهد و بعد آن مقادیر را در تابع قرار داده ماکزیموم و
 مینیموم آنرا تعیین نماییم

مثال ۱ - معلوم کنید بازار چه مقادیر x تابع $y = x^3 - x^2 - x + 1$
 ماکزیموم یا مینیموم است

مشتق تابع فوق را حساب میکنیم تا حاصل شود :

$$y' = 3x^2 - 2x - 1$$

که بازار $x = 1$ و $x = -\frac{1}{3}$ صفر میگردد و علامت آن نیز در فاصله جوابها

بقراریت که در جدول ذیل دیده میشود :

x	$-\infty$	$\frac{1}{27}$	1	$+\infty$
y'	—	+	—	+
y	$-\infty$	$\frac{32}{27}$	0	$+\infty$
		<u>Max</u>	<u>Min</u>	

بطوریکه در جدول فوق ملاحظه میشود تابع معروض بازار مستادیر

$x < \frac{1}{27}$ صعودی بازار مستادیر $\frac{1}{27} < x < 1$ نزولی و بازار مستادیر $x > 1$

نیز صعودی بوده و بنابراین بازار $x = \frac{1}{27}$ دارای ماکزیمومی مساوی $\frac{32}{27}$

و بازار $x = 1$ دارای مینیمومی مساوی صفر میباشد

مثال ۲ - مطلوبیت تعیین ماکزیموم و مینیموم تابع $y = \frac{1}{(x-1)^2}$

مشتق تابع فوق عبارتست از :

$$y' = \frac{-2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{-2}{(x-1)^3}$$

که بازار $x = 1$ مقدار آن $\pm \infty$ میباشد و علامت آن نیز بقرار ذیل

میباشد

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	—	$\pm \infty$	—
y	0	$+\infty$	0
		<u>Max</u>	

چنانکه از جدول فوق ملاحظه میشود مشتق تابع بازار مستادیر $x < 1$ مثبت و لذا

تابع صعودی و بازار مستادیر $x > 1$ منفی و لذا تابع نزولی است و بازار

$x=1$ دارای ماکزیموم $+∞$ میباشد

مثال ۳ - مطلوبست تعیین ماکزیموم و مینیموم تابع $y = \frac{x^3}{3} + x - 2$

مشتق تابع فوق عبارتست از $y' = x^2 + 1$

که علامت آن همیشه مثبت میباشد بنابراین تابع مفروض بازار بر جمیع مقادیر صعودیست و دارای ماکزیموم و مینیموم نمیشد

تعیین ماکزیموم و مینیموم توابع بوسیله

استعمال مشتقات متوالی

۷۲- تابع $y = f(x)$ را اختیار نموده و فرض میکنیم مشتق آن $y' = f'(x)$ باشد که بازار $x = x_0$ صفر گردد حال باید تحقیق نمود که y' بازار جواب

فوق تغییر علامت میدهد یا خیر برای اینکار مشتق ثانی تابع یعنی $y'' = f''(x)$ را تشکیل داده x_0 جواب مشتق اول را در آن قرار میدهم در اینصورت یکی

از سه حالت ذیل اتفاق میافتد :

$$f''(x_0) < 0$$

$$f''(x_0) > 0$$

$$f''(x_0) = 0$$

اولاً $f''(x_0) < 0$ در اینصورت $f'(x)$ بازار x_0 نزولی میباشد و چون x_0

آنها صفر میکند بنا بر این بازار مقدار کمی کوچکتر از آن مثبت و بازار مقدار کمی بزرگتر از آن منفی خواهد بود بطوریکه بازار \times تغییر علامت میدهد و چون ابتدا مثبت و بعد منفی میگردد بنا بر این تابع بازار \times ماکزیموم میباشد
ثانیاً $\phi(x) = 0$ در اینصورت $\phi'(x)$ بازار \times صعودی میباشد
و چون \times آنها صفر میکند بنا بر این بازار مقدار کمی کوچکتر از آن منفی و بازار مقدار کمی بزرگتر از آن مثبت میگردد و بطوریکه تابع بازار \times سینیموم خواهد بود

ثالثاً $\phi(x) = 0$ یعنی جواب مشتق اول مشتق ثانی را نیز صفر میکند
در اینصورت مشتق سوم یعنی $\phi'''(x) = 0$ را تشکیل داده \times جواب مشترک مشتق اول و ثانی را در آن مترازمیدیم باینشکل نیز سه حالت مختلف تشخیص داده میشود: $\phi(x) = 0$ $\phi(x) = 0$ $\phi(x) = 0$

هرگاه $\phi(x) = 0$ باشد $\phi'(x)$ بازار \times نزولی میباشد
و چون \times آنها صفر میکند لذا بازار مقدار کمی کوچکتر از آن مثبت و بازار مقدار کمی بزرگتر از آن منفی خواهد بود بطوریکه $\phi'(x)$ که بازار \times صفر میگردد بازار مقدار کمی کوچکتر از آن صعودی و بنا بر این منفی و بازار مقدار کمی

کمی بزرگتر از آن نزولی و لذا باز هم منفی می باشد بطوریکه $(x) \neq 4$ بازار
 x صفر می گردد و به علامت منها باقی می ماند بنابراین تابع معروض

بازار x نه ماکزیمم می باشد و نه مینیموم

، همچنین است طرز استدلال در موقتی که $(x) = 0$ باشد و در حالتیکه

$(x) = 0$ باشد باید مشتق چهارم را تشکیل داده و همین طریقی تحقیق نمود

چون بطریقه فوق عمل کنیم نتیجه می شود که هرگاه آخرین مشتقی از تابع

$(x) = 4$ که بازار x جواب مشتق اول صفر می شود از مرتبه فرد باشد

مشتق بازار آن تغییر علامت داده و بنابراین تابع ماکزیمم یا مینیموم می باشد

و اگر از مرتبه زوج باشد مشتق تغییر علامت نداده و بنابراین تابع بازار آن

نه ماکزیمم است و نه مینیموم

مثال - چون مشتقات متوالی تابع $y = (x-2)^5$ را حساب کنیم

حاصل می شود :

$$y' = 5(x-2)^4$$

$$y'' = 40(x-2)^3$$

$$y''' = 120(x-2)^2$$

$$y^{IV} = 240(x-2)$$

$$y^V = 240$$

$$y^{VI} = 0$$

چنانکه ملاحظه می شود $x=2$ جواب مشتق اول مشتقات دوم و سوم و چهارم را

نیز صفر مینماید ولی چون آخرین شتی که صفر میگردد از مرتبه زوج است

لذا تابع بازار آن نه ماکزیموم است و نه مینیموم

بعلاوه با اندک وقتی ملاحظه میشود که چون در عبارت $y' = 5(x-2)^4$

قوه $x-2$ زوج میباشد لذا عبارت مزبور بازار $x=2$ تغییر علامت

نداده و علامت مثبت باقی میماند

نقطه عطف

۷۳ - نقطه که مماس بر منحنی در آن نقطه از منحنی عبور نماید نقطه عطف نامیده

میشود مثلاً در منحنی e نقطه I نقطه عطف میباشد حال چون مماس

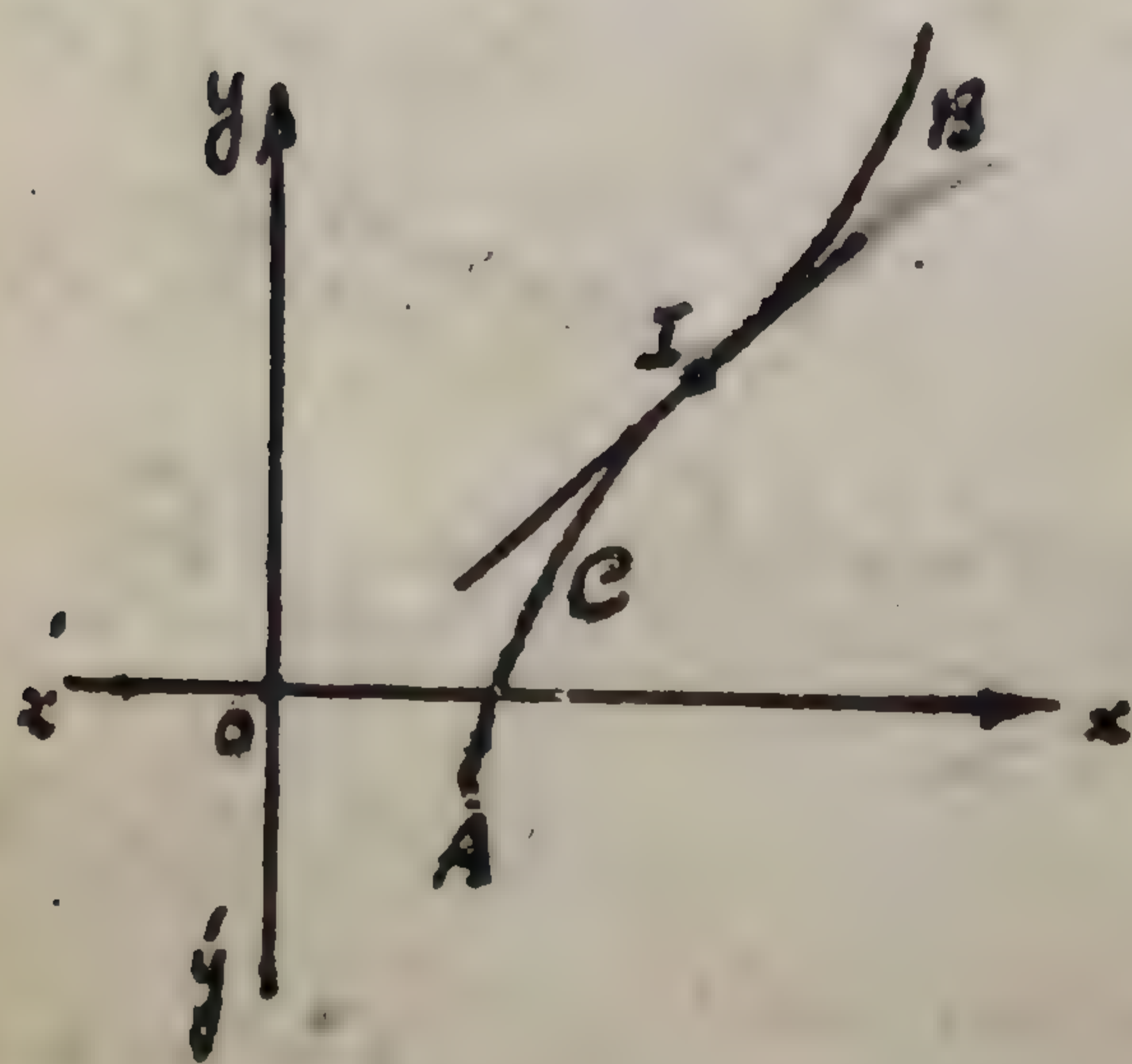
بر منحنی را در شاخه AI

رسم کنیم دیده میشود که هر چه

از A به I نزدیک شویم

زاویه حادثه مابین مماس

و جهت مثبت محور x کوچک میشود



همچنین اگر خطوط مماس بر منحنی را در شاخه IB رسم نمایم دیده میشود که هر چه

از B به I نزدیک شویم زاویه حادثه مابین مماس با جهت مثبت محور x

کو چتر میگردد بطوریکه زاویه مزبور در نقطه I به مینوم خود میرسد.
 حال اگر زاویه مماس بر منحنی را در نقطه I با جهت مثبت محور x مساوی θ
 فرض کنیم بنا بر آنچه راجع به تغییر مهندسی مشتق بیان نمودیم مشتق تابع بازار طول
 نقطه I عبارت خواهد بود از $y' = 3x^2 - 3$ و چون y' بازار طول نقطه I
 مینوم است بنا بر این مشتق آن بازار طول نقطه I تغییر علامت میدهد
 بطوریکه برای تعیین نقاط عطف منحنی کافیت معلوم کنیم که مشتق ثانی تابع بازار
 چه مقادیر x تغییر علامت میدهد این مقادیر طول نقاط عطف خواهند بود
 در حالت مخصوصی که جواب مشتق ثانی مشتق اول را نیز صفر کند ضرب
 زاویه مماس بر نقطه عطف مساوی صفر و لذا مماس بر نقطه عطف موازی
 محور x میگردد.

مثال - نقاط ماکزیم و مینوم و نقطه عطف تابع $y = x^3 - 3x + 1$
 را معلوم نموده و معادله مماس بر نقطه عطف را تعیین کنید.

مشتق اول تابع عبارتست از $y' = 3x^2 - 3$ و مشتق ثانی آن عبارتست

از $y'' = 6x$ که چون هر یک را مساوی صفر قرار داده و علامت آنها

را معلوم کنیم جدول ذیل بدست میآید :

x	$-\infty$	-1	0	$+1$	$+\infty$
y'	+	0	—	0	+
y''	—	—	0	+	+
		<u>Max</u>	نقطه عطف	<u>Min</u>	

چنانکه از جدول فوق مشاهده میشود منحنی تابع معروض در نقطه $M(-1, 3)$ ماکزیموم و در نقطه $N(1, -1)$ مینیموم و در نقطه $I(0, 1)$ دارای نقطه عطف میباشد.

حال برای تعیین معادله مماس بر نقطه عطف در صورت کلی خطوط مار بر نقطه عطف که عبارت است از $y - 1 = m(x - 0)$ بجای m ضریب زاویه مماس را که برابر است با ۳- قرار میدسیم تا حاصل شود $y = -3x + 1$

رسم جدول و منحنی تغییرات توابع

۷۴- چنانکه گفتیم هرگاه در تابع $y = f(x)$ برای x مقادیر مختلفه فرض نموده و مقادیر نظیر آنها را برای y حساب کنیم و نقاط نظیر این دستکاههای x و y را نسبت بسطح دو محور قائم تعیین نماییم این نقاط تشکیل خطی را میدهند که از آنمایش مندی تابع $y = f(x)$ میمانند.

حال برای رسم نمایش هندسی تغییرات تابع $(x) = f(x)$ عموماً خطوط و نقاط
اصلیه را تعیین نموده و از وصل نقاط مزبور سبک دیگر با رعایت جهت تغییرات تابع
منحنی آن را رسم نماییم ازینقرار :

۱- x را به سمت $+$ میل میدهم در صورتیکه y دارای حدی مانند a باشد
خط $x = a$ بجانب منحنی میاشد

۲- y را به سمت $+$ میل میدهم در صورتیکه x دارای حدی مانند a باشد
خط $x = a$ بجانب منحنی خواهد بود

۳- در صورتیکه منحنی دارای بجانب غیر موازی با دو محور و یا دارای بجانب منحنی
باشد آنرا نیز مطابق دستوریکه سابقاً بیان نمودیم بدست میآوریم

۴- x را مساوی صفر اختیار نموده مقدار y نظیر آنرا بدست میآوریم
در اینصورت نقطه تقاطع منحنی با محور y بدست میآید

۵- مقدار y را مساوی صفر قرار داده مقادیر x نظیر آنرا حساب میکنیم
در اینصورت نقاط تقاطع منحنی با محور x بدست میآید (گاهی تعیین

این مقادیر x منجر حل معادلاتی میشود که آنها را اصولاً نمیتوان حل نمود یا آنکه
حل آنها با سانی امکان پذیر نیست در اینصورت از تعیین این نقاط صرف نظر

بنماییم بلکه رسم منحنی را وسیله برای حل معادله و یا بحث در عذرشهای آن قرار میدسیم (۶- مشتق تابع را حساب نموده معلوم میکنیم بازار چه مقادیر صفر شود و یا به نهایت میگردد و علامت آنرا در فواصل این مقادیر تعیین بنماییم واضح است که بازار هر مقدار که مشتق تغییر علامت دهد تابع ماکزیمم و مینیمم میشود باین ترتیب نقاط منحنی نظیر ماکزیمم و مینیمم تابع نیز بدست میآید ۷- برای آنکه رسم منحنی تحقیق نزدیکتر باشد ممکن است مخصوصاً در توابعی که کلیه مشتقات فوق را دارا نیستند بطور اختیار مقادیری برای x فرض نموده مقادیر y نظیر آنها را بدست آورده با شکل نزدیکه نقاط منحنی معلوم میگردد ۸- در توابع اضماعنی توابعی که در آنها x زیر را دیکال باشد باید قبلاً تعیین نمود که بازار چه مقادیر x تابع دارای مقدار حقیقی میباشد تا آنکه همیشه مقادیر x را در آن حدود اختیار نمود

۹- پس از انجام مقدمات فوق جدولی ترتیب داده مقادیر x را مرتباً از ۵۰ تا ۱۰۰ در آن تنظیم میکنیم و جوابهای مشتق و علامت آنرا در فواصل جوابها در آن یادداشت نموده نقاط نظیر آنها را تعیین و منحنی را بطور تقریب رسم میکنیم

اینک برای نمونه مسائل ذیل را حل میکنیم

مسئله ۱- مطلوب است رسم جدول و منحنی تغییرات تابع $y = x^3 + 2x^2 - 3x + 4$

۱- تابع فوق بازار جمع مقادیر x اتصالی است

۲- مشتق تابع عبارت از $y' = -2x + 2$ که بازار $x = 1$ صفر میگردد

۳- بازار $x = \pm \infty$ حاصل میشود $y = -\infty$

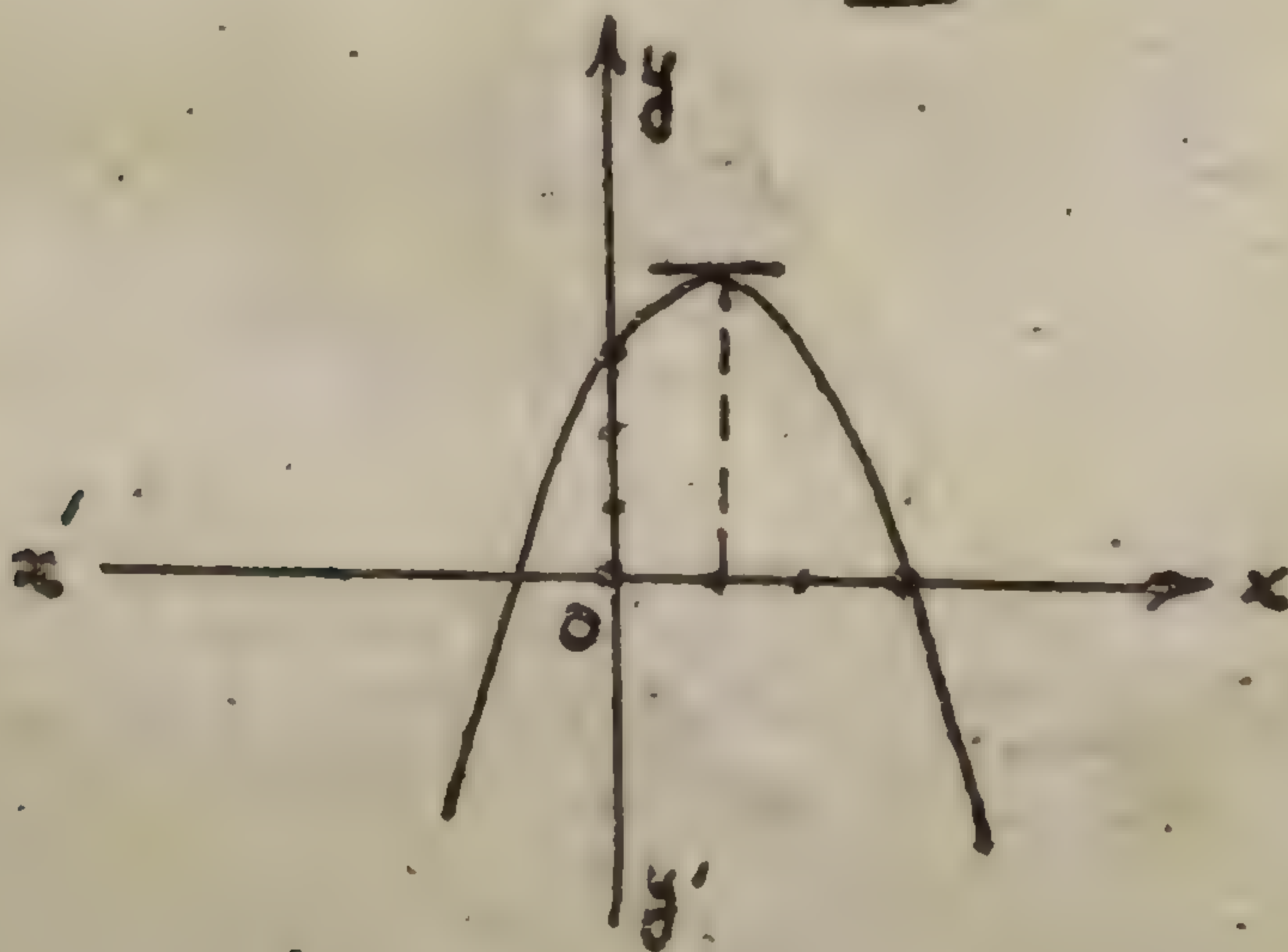
۴- بازار $x = 0$ حاصل میشود $y = 2$

۵- بازار $y = 0$ حاصل میشود $x = 3$ و $x = -1$

جدول و منحنی تغییرات تابع بصورت ذیل میباشد :

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$	
y'		— —		0	— —		
y	$-\infty$	\nearrow	0	\nearrow	2	\searrow	$-\infty$

Max



مسئله ۲ - جدول و منحنی تغییرات تابع $y = x^2 - 6x + 5$ را رسم کنید

۱- تابع فوق بازار جمع مقادیر x اتصالی است

۲- مشتق آن عبارت است از $y' = 2x - 6$ که بازار $x = 3$ صفر میگردد

صفر میگردد

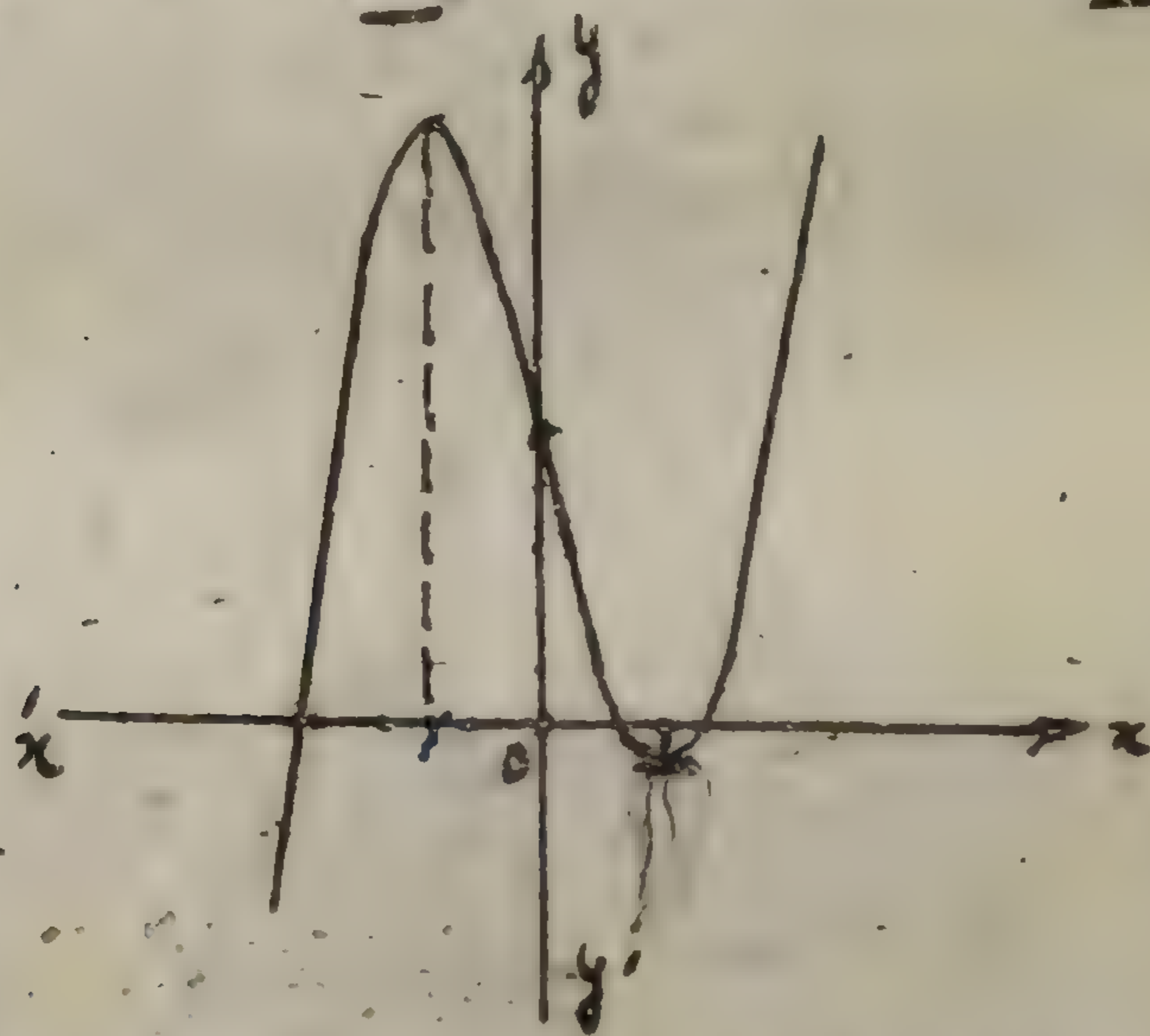
۳- بازار $x = \pm \infty$ حاصل میشود $y = \pm \infty$

۴- بازار $x = 0$ حاصل میشود $y = 5$

۵- بازار $y = 0$ حاصل میشود $x = 1$ و $x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$

جدول و منحنی تغییرات آن بصورت ذیل خواهد بود :

x	$-\infty$	$-2,1$	1	0	1	$\sqrt{3}$	$1,8$	$+\infty$
y'		+		0	—	0	+	
y	$-\infty$	\nearrow	0	\searrow	$10,6$	\searrow	0	\nearrow
					<u>Max</u>		<u>Min</u>	



مسئله ۳- مطلوبست رسم جدول و منحنی تغییرات تابع دو محبذوری

$$y = x^4 - 5x^2 + 4$$

۱- تابع فوق بازار جمیع مقادیر x اتصالی است

۲- مشتق تابع عبارتست از $y' = 4x^3 - 10x$ که بازار $x = 0$ و $x = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$ صفر میگردد

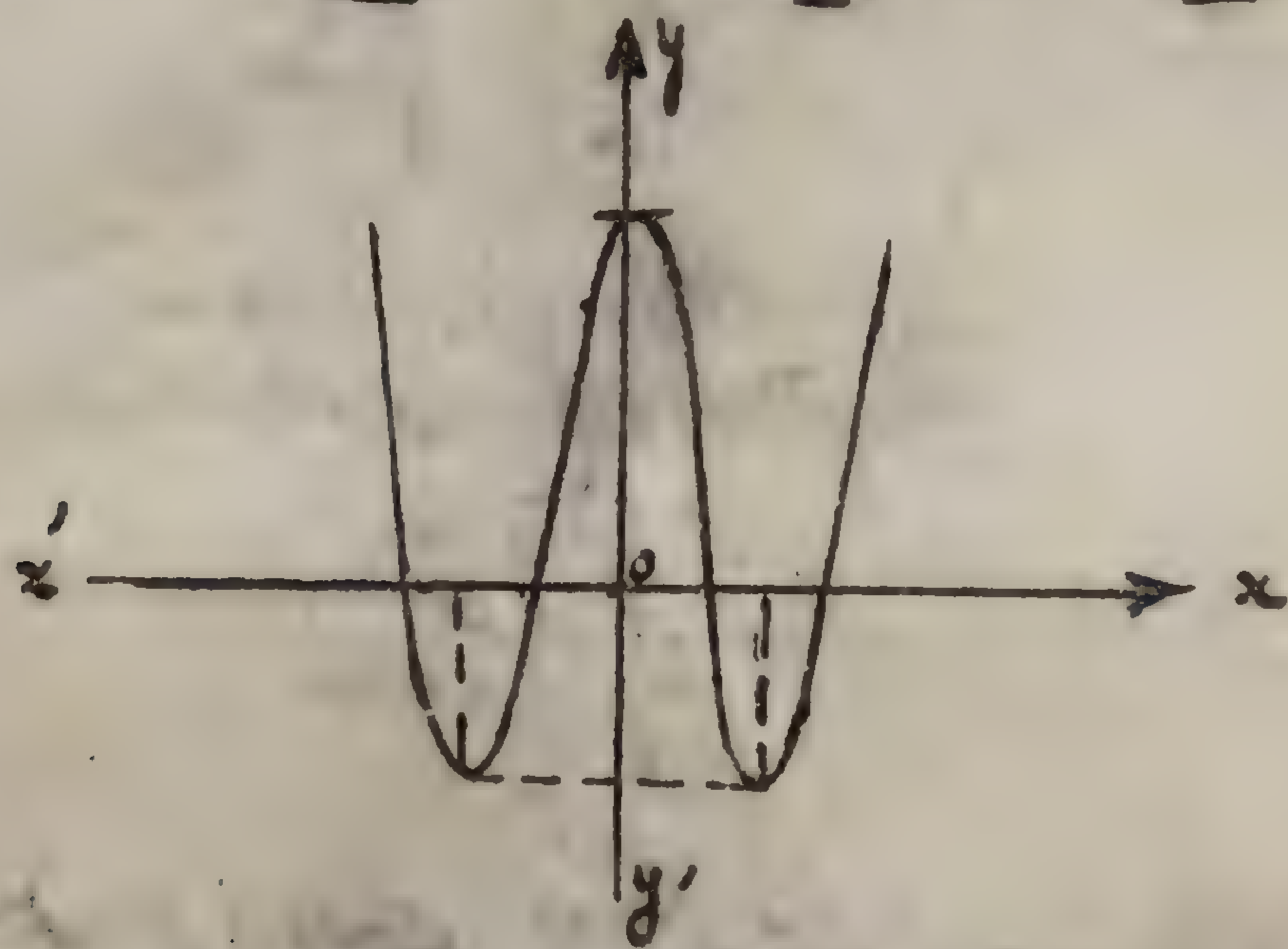
۳- بازار $x = \pm\infty$ حاصل میشود $y = +\infty$

۴- بازار $x = 0$ حاصل میشود $y = 4$

۵- بازار $y = 0$ حاصل میشود $x = \pm 1$ و $x = \pm 2$

جدول و منحنی تغییرات تابع بصورت ذیل میباشد:

x	$-\infty$	-2	-1.5	-1	0	1	1.5	2	$+\infty$
y'		—	0	+	0	—	0	+	
y	$+\infty$	\searrow 0	\searrow -2.2	\nearrow 0	\nearrow 4	\searrow 0	\searrow -2.2	\nearrow 0	$+\infty$
			<u>min</u>		<u>Max</u>		<u>min</u>		



مسئله ۴- مطلوبست رسم جدول و منحنی تغییرات تابع $y = \frac{x+1}{x-2}$

۱- تابع فوق بازار بر جمع مقادیر x اتصالی است مگر بازار $x = 2$ که بازار آن

مقدار $y = \pm\infty$ میباشد

۲- مشتق تابع عبارتست از $y' = \frac{-3}{(x-2)^2}$ که بازار بر جمع مقادیر x منفی میباشد

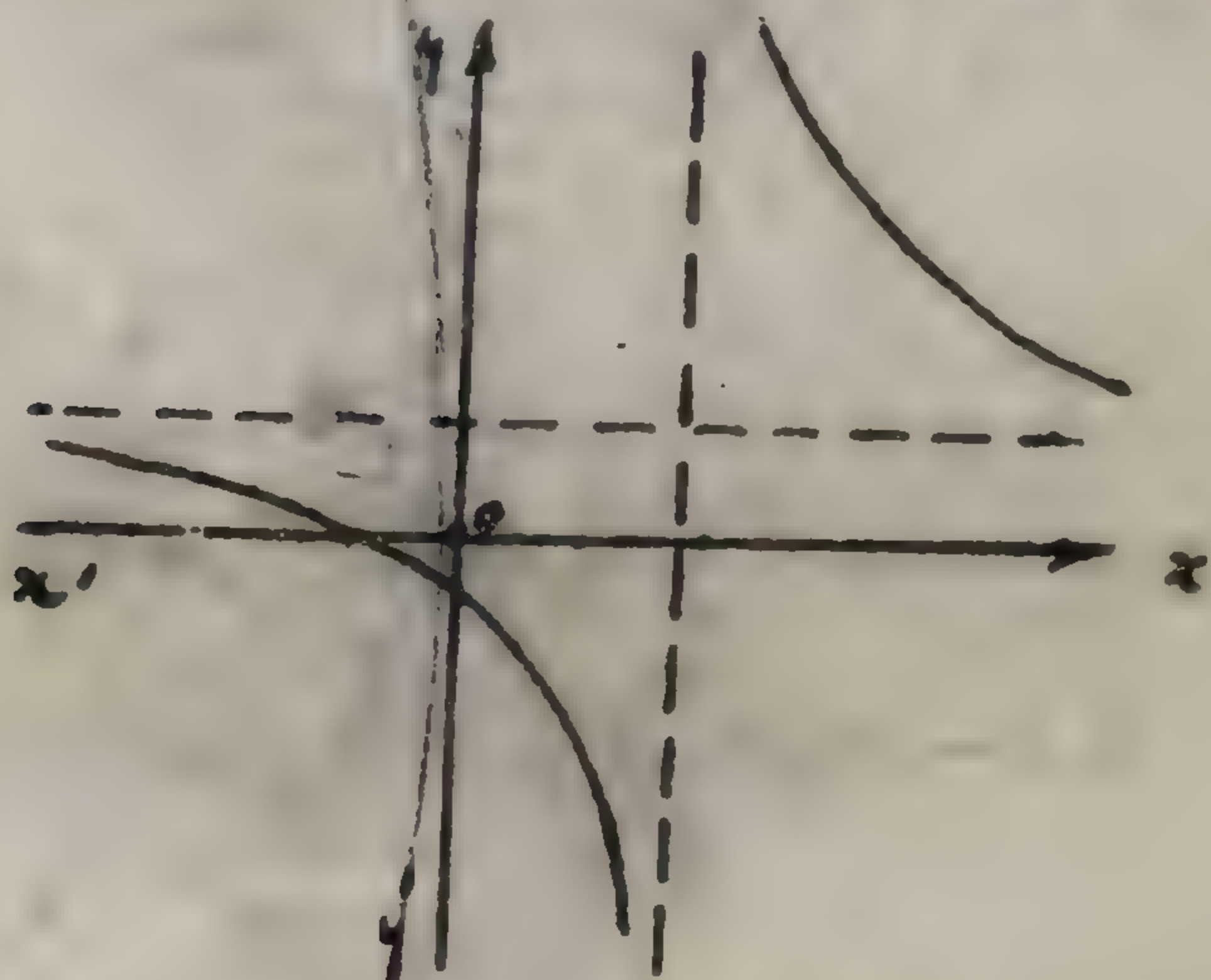
۳- بازار $x = \pm\infty$ حاصل میشود $y = 1$

۲- بازاء $x=0$ حاصل میشود $y=\frac{1}{2}$

۵- بازاء $y=0$ حاصل میشود $x=-1$

جدول و منحنی تغییرات تابع بصورت ذیل میباشد:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
y'					
y	1	\rightarrow	\rightarrow	\rightarrow	1



مسئله ۵- مطلوبست رسم جدول و منحنی تغییرات تابع $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 2x + 3}$

۱- تابع فوق بازاء جمیع مقادیر x اتصالی است

۲- مشتق آن عبارتست از $y' = \frac{-4x^2 + 12x}{(x^2 - 2x + 3)^2}$ که بازاء $x=0$ و $x=3$

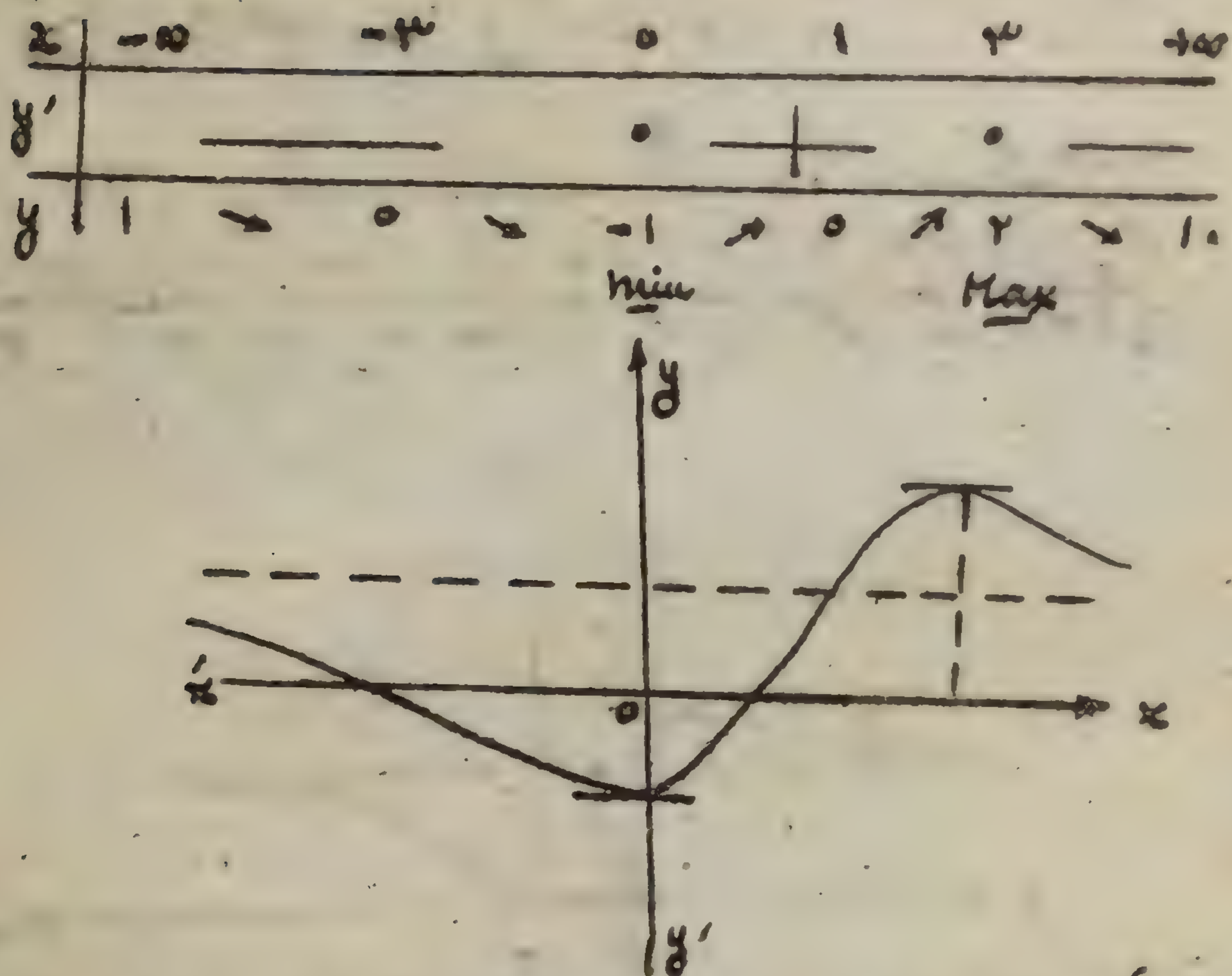
صفر میگردد

۳- بازاء $x=\pm\infty$ حاصل میشود $y=1$

۴- بازاء $x=0$ حاصل میشود $y=-1$

۵- بازار، $y=0$ حاصل میشود $x=1$ و $x=-3$

جدول و منحنی تغییرات بصورت ذیل میباشد :



مسئله ۶- مطلوب است رسم جدول و منحنی تغییرات تابع :

$$y = \frac{3x^2 + 2x - 5}{(x+1)^2}$$

آ- تابع فوق بازار، جمع مقادیر x اتصالی است بازار، $x = -1$ جواب

مخرج مقدار y برابر است با $-\infty$

۲- مشتق تابع عبارتست از $y' = \frac{4(x+3)}{(x+1)^3}$ که بازار، $x = -3$ صفر

و بازار، $x = -1$ منفصل میگردد

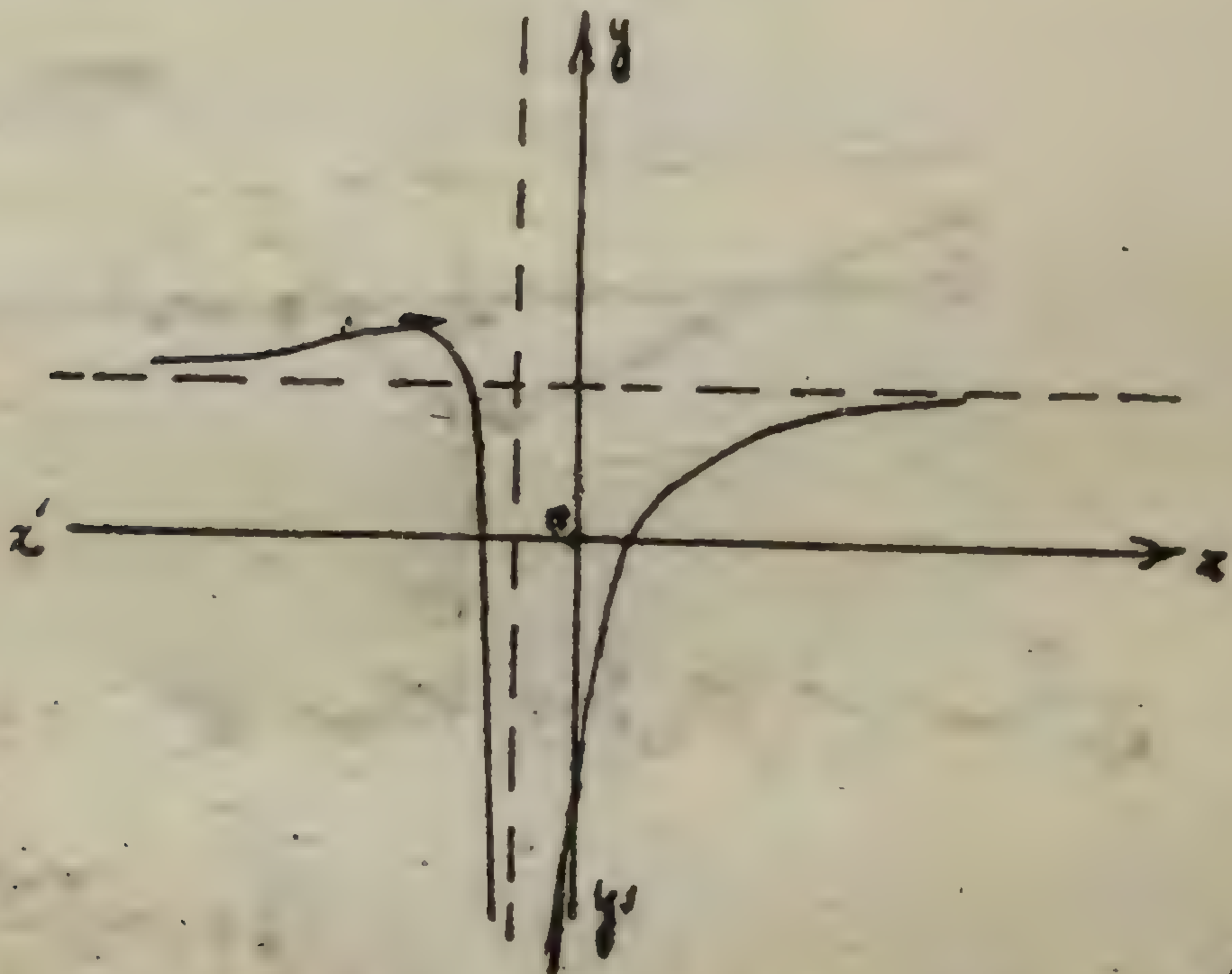
۳- بازار، $x = \pm\infty$ حاصل میشود $y = 3$

۴- بازار $x=0$ حاصل شود $y=-5$

۵- بازار $y=0$ حاصل شود $x=1$ و $x=-\frac{5}{2}$

جدول و منحنی تغییرات بصورت ذیل می باشد:

x	$-\infty$	-3	$-\frac{5}{2}$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	+	0	+	+	+	+
y	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	-5	0	$+\infty$



مسئله ۷- مطلوب است رسم جدول و منحنی تغییرات تابع $y = \frac{x^2 - x - 4}{x - 1}$

۱- تابع فوق بازار جمع مقادیر x انحصالی است مگر بازار $x=1$ جواب

مخرج که بازار آن مقدار $y = \pm \infty$ می باشد

۲- مشتق تابع عبارتست از $y' = \frac{x^2 - 2x + 5}{(x - 1)^2}$ که علامت آن همیشه مثبت

و بنابراین تابع همیشه صعودی است

۳- بازاء $x = \pm\infty$ حاصل میشود $y = \pm\infty$

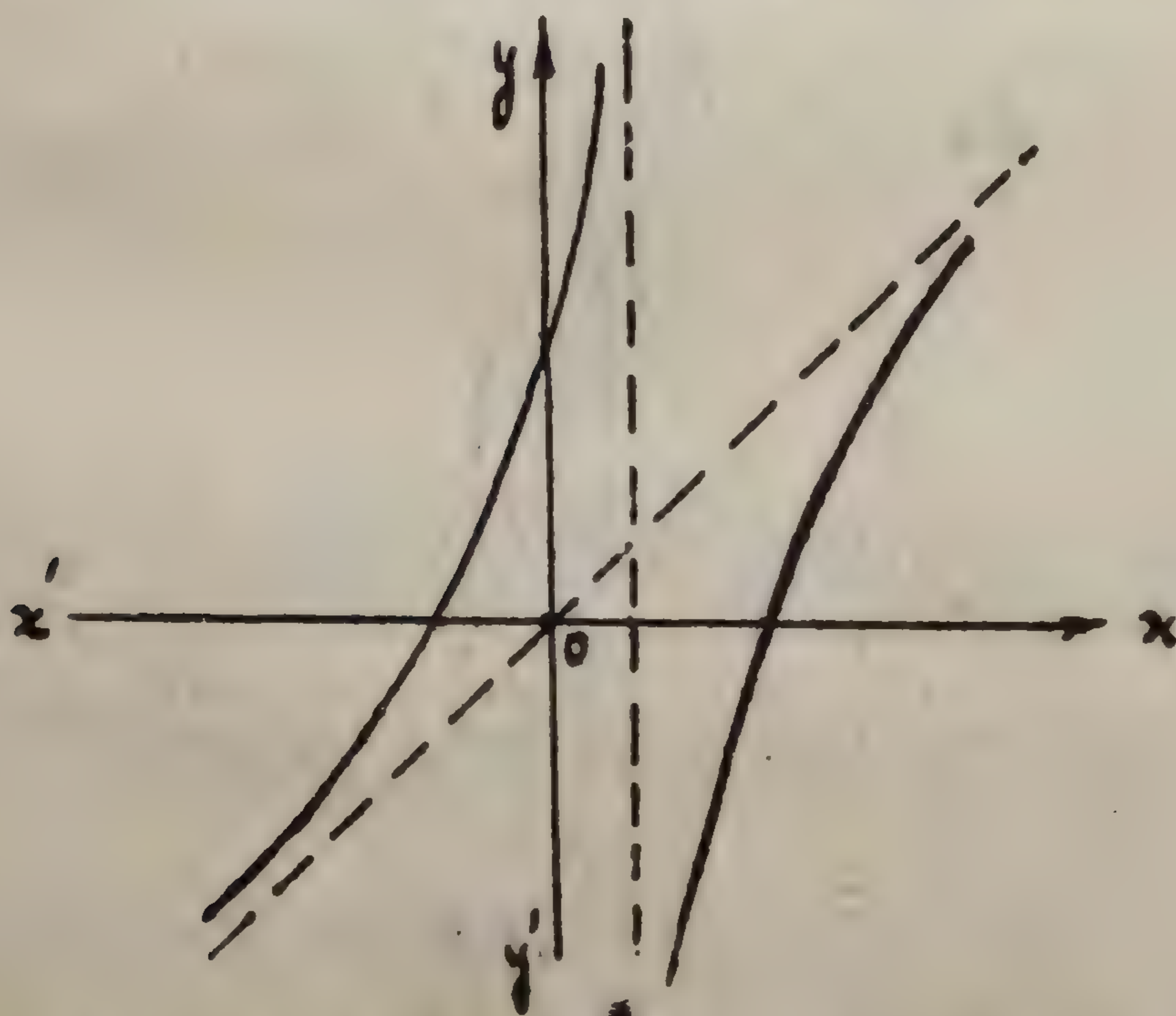
۴- بازاء $x = 0$ حاصل میشود $y = 4$

۵- بازاء $y = 0$ حاصل میشود $x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$

۶- چون صورت را بر مخرج تقسیم کنیم خارج قسمت عبارت است از x بنابراین خط $y_1 = x$ بجانب منحنی میباشد

جدول و منحنی تغییرات تابع بصورت ذیل خواهد بود

x	$-\infty$	$-1,5$	0	1	$2,5$	$+\infty$
y'						
y	$-\infty$	\nearrow	0	\nearrow	$+\infty$	$+\infty$



مسئله ۸- مطلوب است رسم جدول و منحنی تغییرات تابع $y = \frac{(x-2)^2}{x^2 + 3x - 4}$

۱- تابع فوق بازاء جمیع مقادیر x اتصال است مگر بازاء $x = 1$ و $x = -4$

جوابهای مخرج که مقدار y نظیر آن برابر است با $\pm \infty$

۲- مشتق تابع عبارتست از $y' = \frac{(x-2)(2x-2)}{(x^2+3x-14)^2}$ که بازاء $x=2$ و $x = \frac{1}{2}$ صفر میگردد

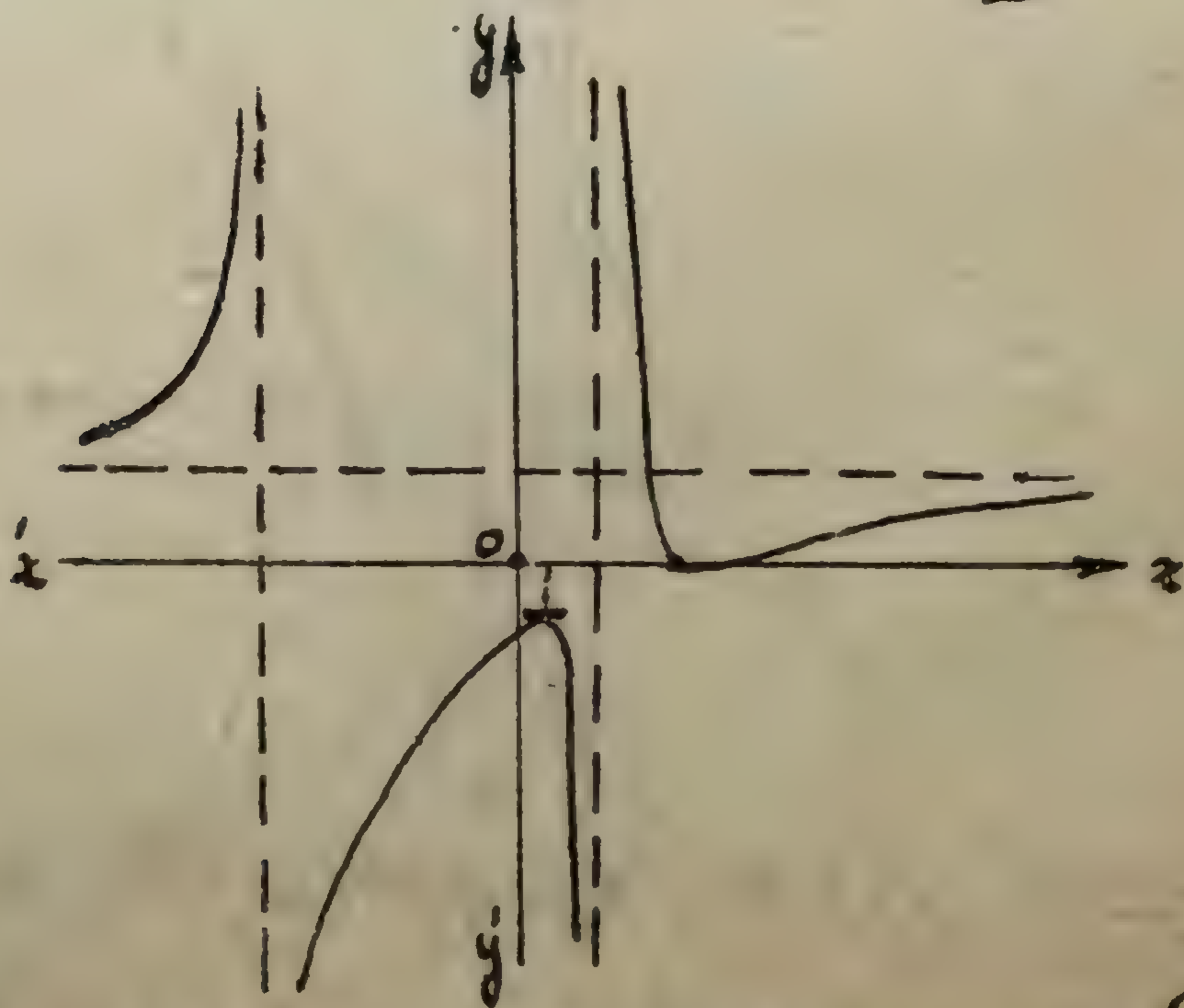
۳- بازاء $x = \pm \infty$ حاصل میشود $y = 1$

۴- بازاء $x = 0$ حاصل میشود $y = -1$

۵- بازاء $y = 0$ حاصل میشود $x = 2$

جدول و منحنی تغییرات بصورت ذیل میباشد :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$
y'		—	—	0	—	0	—
y	1	$+\infty$	-1	-0.9	$+\infty$	0	1
		$-\infty$		<u>Max</u>	$-\infty$	<u>min</u>	



مسئله ۹- مطلوبست رسم جدول و منحنی تغییرات تابع $y = \frac{x^3}{1-x^2}$

۱- تابع فوق باز از جمیع مقادیر x تقصالی است مگر باز $x = \pm 1$ که مقدار y نظیر عبارت از $\pm \infty$

۲- مشتق تابع عبارت از $y' = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$ که باز $x = 0$ و $x = \pm\sqrt{3}$ صفر میگردد

۳- باز $x = \pm\infty$ حاصل میشود $y = \mp\infty$

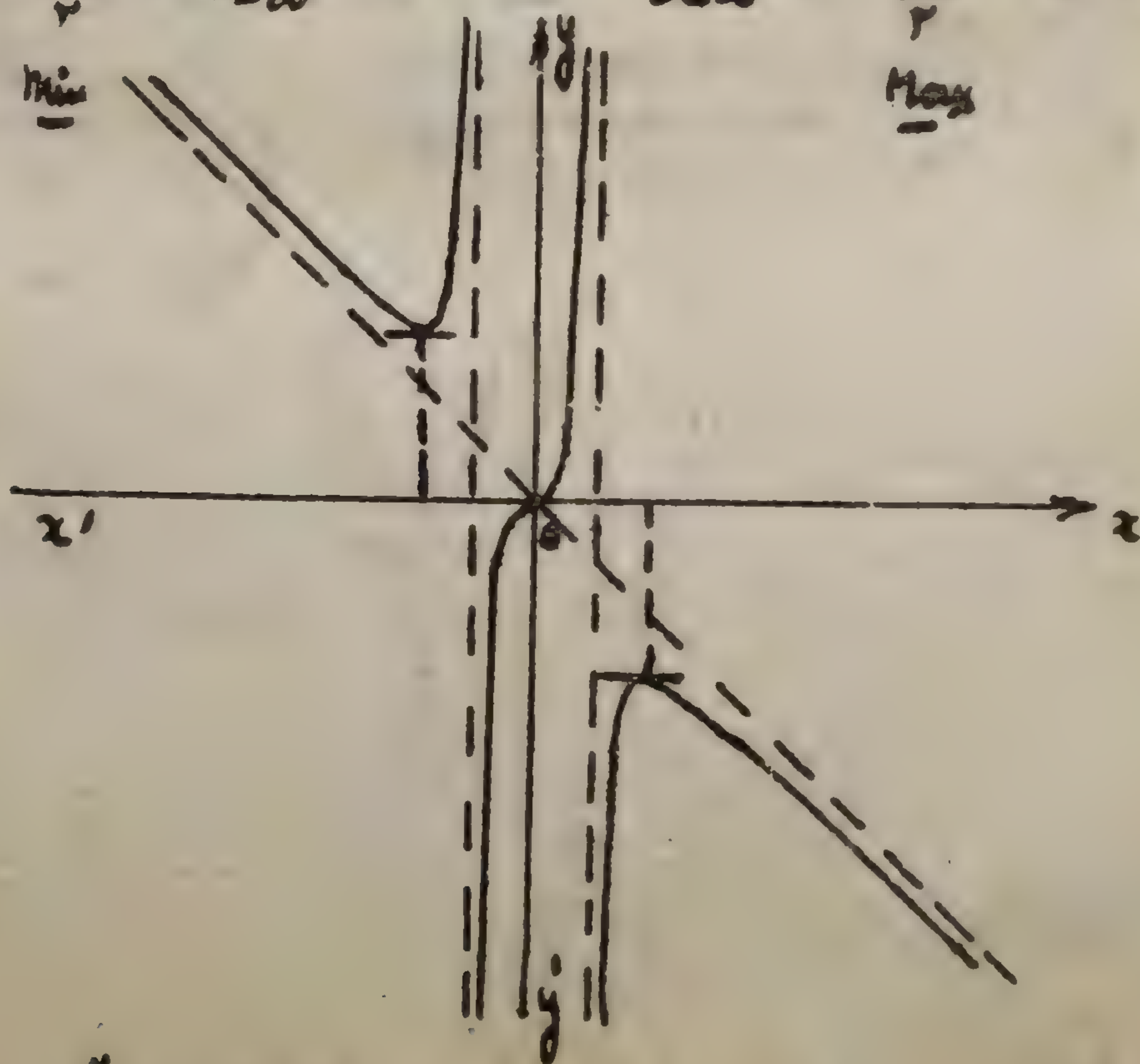
۴- باز $x = 0$ حاصل میشود $y = 0$

۵- چون صورت را بر مخرج تقسیم کنیم خارج قسمت عبارت میگردد از $-x$ و بنابراین

خط $y_1 = -x$ بجانب منحنی میباشد

جدول و منحنی تغییرات تابع بصورت ذیل خواهد بود :

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
y'	—	•	+	•	+	•	—
y	$+\infty$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$	0	$-\infty$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$-\infty$



مسئله ۱۰- مطلوبست رسم جدول و منحنی تغییرات تابع $y = \frac{x^3 + 1}{x}$

۱- تابع فوق بازاء جمع مقادیر x اتصالی است مگر بازاء $x=0$ جواب
مخرج که مقدار y نظیر آن عبارتست از $\pm\infty$

۲- مشتق تابع عبارتست از $y' = \frac{4x^3-1}{x^2}$ که بازاء $x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ صفر میگردد

۳- بازاء $x = \pm\infty$ حاصل میشود $y = +\infty$

۴- بازاء $y = 0$ حاصل میشود $x = -1$

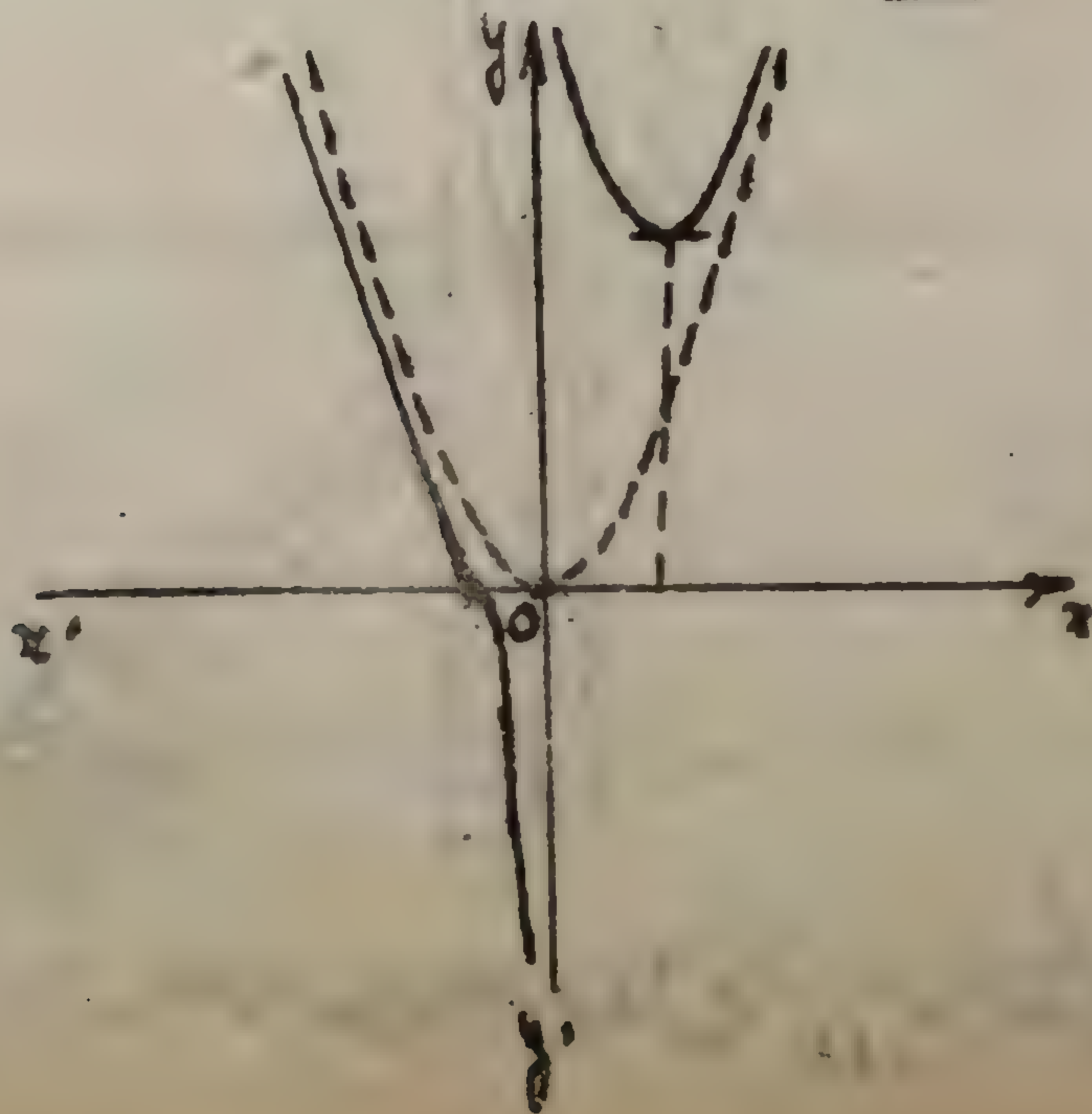
۵- چون صورت را بر مخرج تقسیم کنیم خارج قسمت عبارتست از x^2

و بنابراین خط $y_1 = x^2$ مجانب منحنی میباشد

جدول منحنی تغییرات بصورت ذیل خواهد بود :

x	$-\infty$	-1	0	$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$	$+\infty$
y'		—	—	0	+
y	$+\infty$	\rightarrow	0	$+\infty$	\rightarrow

\min



توابع اضم

۷۵- هرگاه متغیر زیر را دیکال باشد تابع را اضم گویند و در تغییرات تابع اضم قبلاً لازم است تحقیق نمود که تابع بازار چه سمت دیر x حقیقی میباشد تا آنکه تغییرات x را در حدود سمت دیر مزبوره اختیار نمود اینک برای نمونه تغییرات چند تابع اضم را مورد بحث قرار میدهم

مسئله ۱- مطلوبست رسم جدول و منحنی تغییرات تابع $y = 2x\sqrt{\frac{x}{x+1}}$

۱- برای آنکه تابع دارای مقدار حقیقی باشد باید $x \geq 0$ و بنا بر این

$$x \geq 0 \quad \text{و یا} \quad x \leq -1 \quad \text{باشد}$$

۲- مشتق تابع عبارتست از $y' = \sqrt{\frac{x}{x+1}} \times \frac{2x+2}{x+1}$ که علامت آن

همیشه علامت $\frac{2x+2}{x+1}$ میباشد که بازار $x = -\frac{1}{2}$ و $x = -1$ صفر و بازار $x = -1$ منفصل میگردد

۳- بازار $x = -1$ حاصل میشود $y = 0$

۴- بازار $x = \pm\infty$ حاصل میشود $y = \pm\infty$

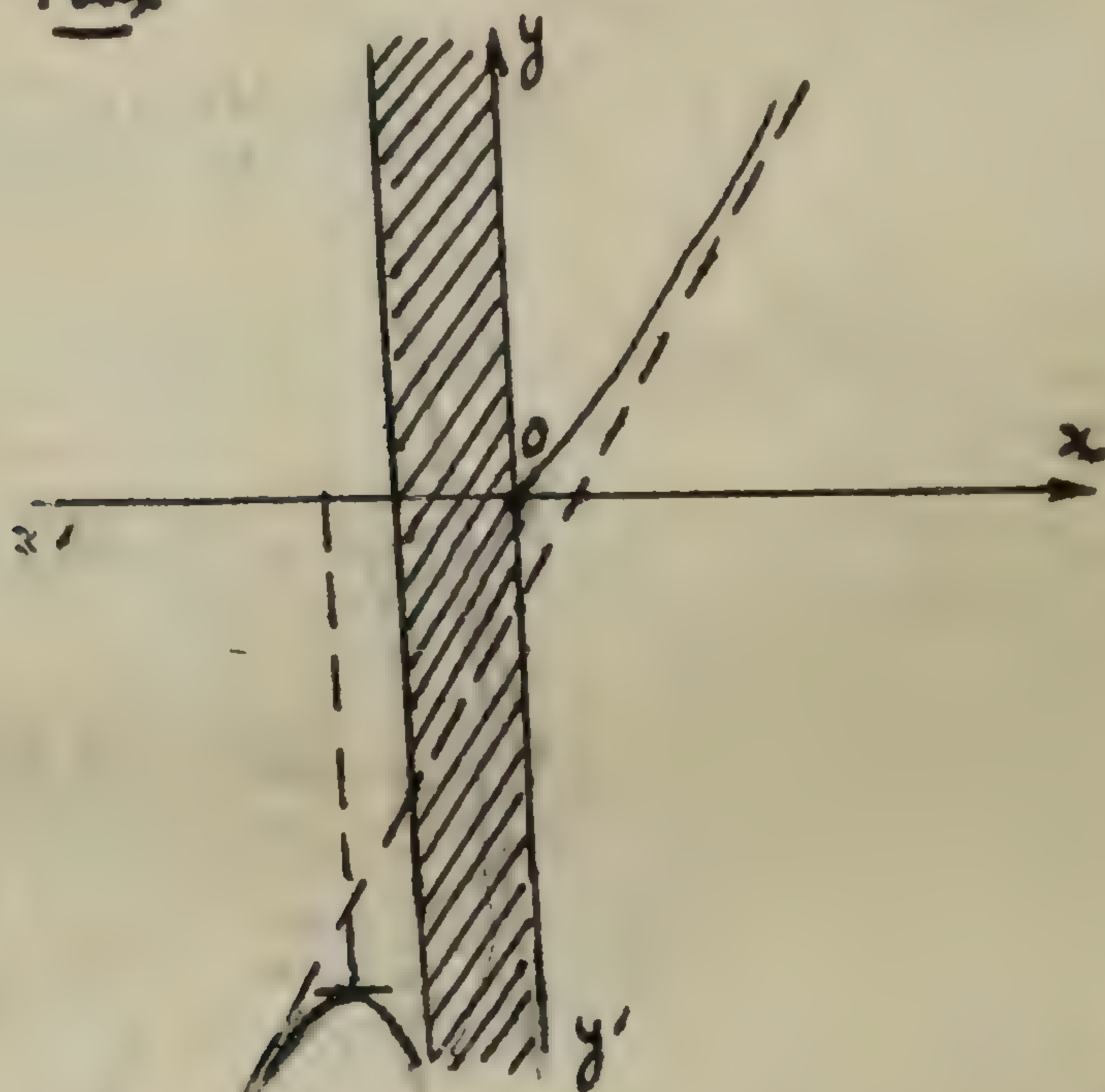
۵- بازار $x = 0$ حاصل میشود $y = 0$

۶- چون معادله خط مجانب غیر موازی محور را در تابع فوق بطریقی که

سابقاً گفته ایم بدست آوریم حاصل میشود $y_1 = 2x - 1$
جدول و منحنی تغییرات بصورت ذیل خواهد بود :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	-1	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$-3\sqrt{2}$	$-\infty$	1	$+\infty$

Max



مسئله ۲ - مطلوب است رسم جدول و منحنی تغییرات تابع $y = x \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$
بفرض آنکه $a > 0$ باشد

۱- برای آنکه تابع دارای مقدار حقیقی باشد باید $\frac{a-x}{a+x} \geq 0$ و یا $-a \leq x \leq a$ باشد

۲- مشتق تابع عبارتست از $y' = \frac{-x^2 - ax + a^2}{(a+x)\sqrt{(a-x)(a+x)}}$ که مخرج آن همیشه مثبت و جوابها

صورت عبارتست از $x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$ و $x = -\frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1)$ و بنابراین

علامت صورت در فاصله دو جواب مثبت و در خارج دو جواب منفی است

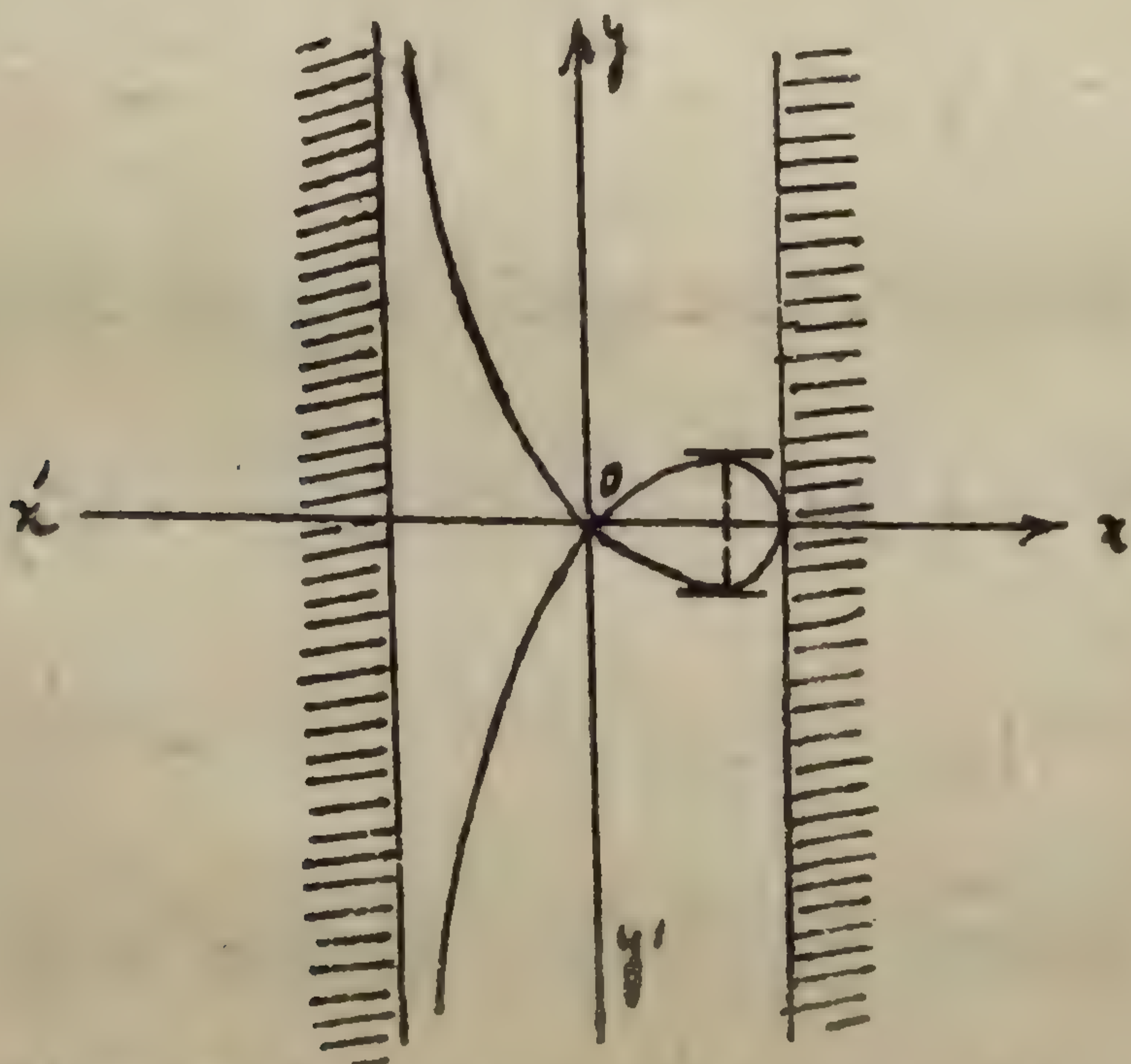
ولیکن چون جواب دوم از $-a$ - کوچکتر است لذا تابع باز از آن دارای مقدار حقیقی نخواهد بود

۳- باز از $x = -a$ مقدار $y = -\infty$ می باشد

۴- باز از $x = 0$ حاصل میشود $y = 0$

جدول و منحنی تغییرات بصورت ذیل می باشد

x	$-\infty$	$-a$	0	$\frac{a}{2}(r_0 - 1)$	a	∞
y'			+	0	-	
y	$-\infty$		0	M	0	∞



تبصره - هرگاه بطور کلی تغییرات تابع $y' = \frac{x^2(a-x)}{a+x}$

را مورد بحث قرار دهیم منحنی دیگری بدست می آید که نسبت به محور x' با منحنی

اول قرینه می باشد و آن عبارتست از منحنی $y = -x \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$

منحنی تغییرات $y^2 = \frac{x^2(a-x)}{a+x}$ و یا $y = \pm x \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ را که کتب

از دوشاخه قرینه فوق می باشد Strophoide می نامند

مسئله ۳ - مطلوبست رسم جدول و منحنی تغییرات تابع $y = x \sqrt{\frac{x}{a-x}}$

که در آن $a > 0$ فرض شده است

۱- برای آنکه تابع دارای مقدار حقیقی باشد باید $\frac{x}{a-x} \geq 0$ و از آنجا $a \geq x \geq 0$

باشد

۲- مشتق تابع عبارتست از $y' = \frac{\sqrt{x}(3a-2x)}{2\sqrt{(a-x)^3}}$ که مخرج آن همیشه

مثبت و جوابهای صورت عبارتست از $x=0$ و $x=\frac{3}{2}a$ و چون \sqrt{x}

همواره مثبت می باشد بنا بر این علامت صورت علامت $3a-2x$ می باشد

که بازار مقادیر $x < \frac{3}{2}a$ مثبت و بازار مقادیر $x > \frac{3}{2}a$ منفی می باشد

و چون $\frac{3}{2}a$ بزرگتر از a می باشد لذا تابع و مشتق بازار آن دارای

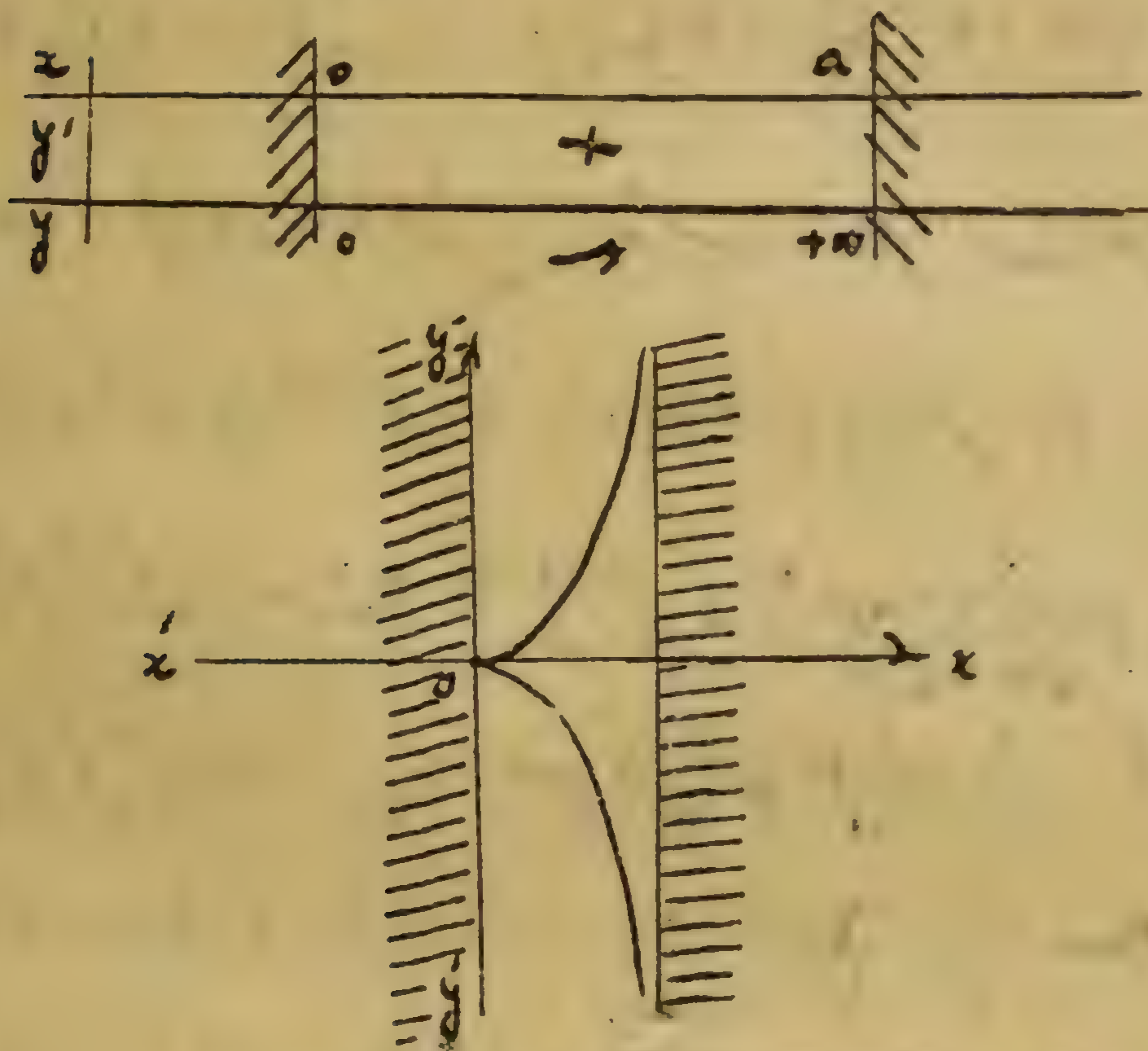
مقدار حقیقی نمی باشد بطوریکه علامت مشتق همیشه مثبت و تابع صعودی

است .

۳- بازار $x=a$ حاصل میشود $y=+\infty$

۴- بازار $x=0$ حاصل میشود $y=0$

جدول و منحنی تغییرات تابع بصورت ذیل می باشد



توضیح - چون بطور کلی تغییرات تابع $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$ را مورد مطالعه قرار دهیم منحنی دیگری قرینه منحنی فوق نسبت به محور $x'x$ بدست می آید که عبارت

$$y = -x \sqrt{\frac{x}{a-x}}$$

منحنی تغییرات تابع $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$ و یا $y = \pm x \sqrt{\frac{x}{a-x}}$ را که

مرکب از دو شاخه قرینه فوق می باشد consists of می نامند

حل گرافیک بعضی مسائل

۷۶- رسم منحنی تغییرات توابع را به موارد ممکن است وسیله برای حل و بحث

بعضی مسائل پارامتری شده را داد ازین قرار :

مسئله ۱- معادله درجه دوم :

$$(m-2)x^2 - 3x(m-4) - 4(m+1) = 0$$

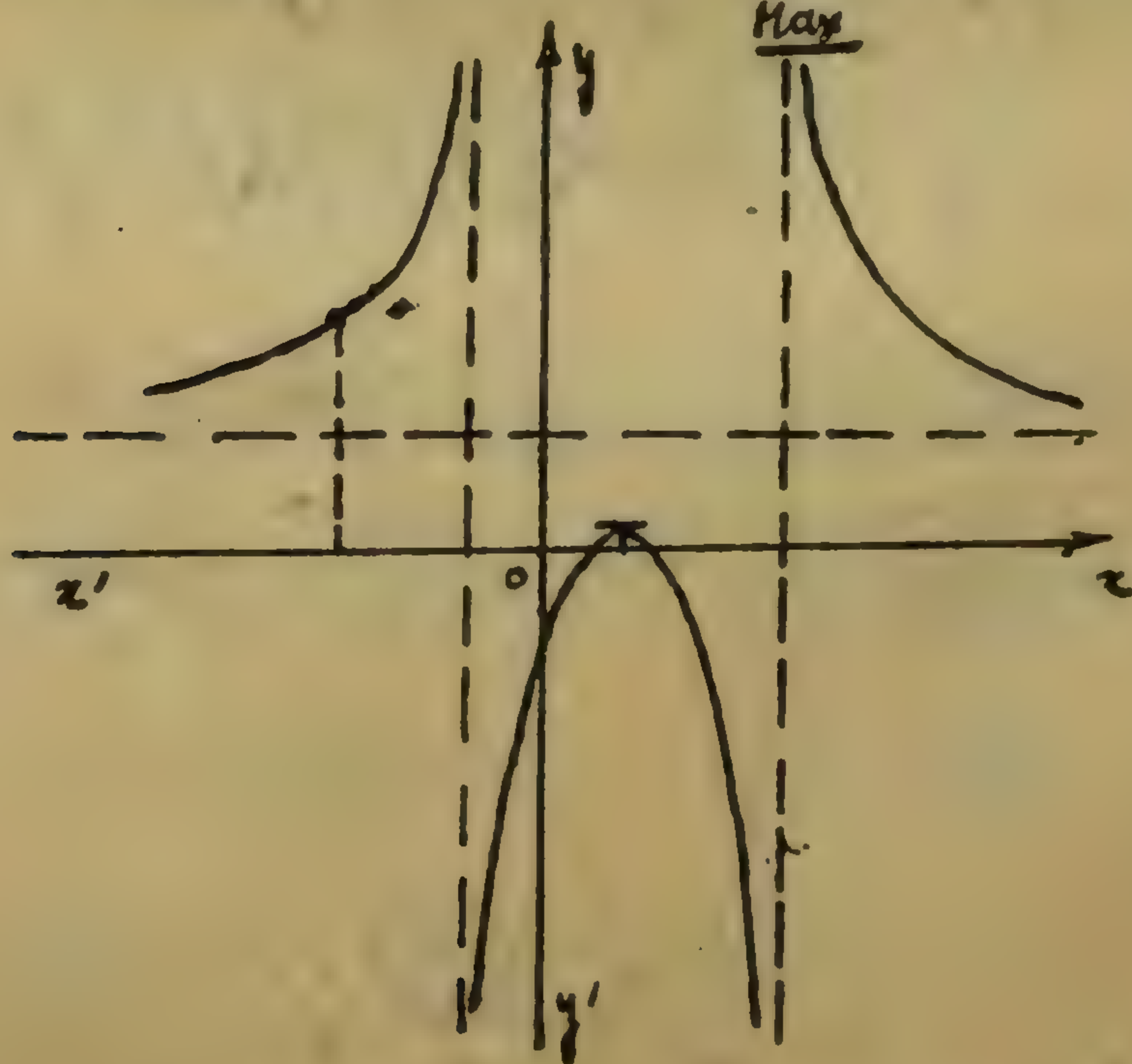
که در آن x مجهول و m نمایش پارامتریت مفروض است مطلوبیت

مقایسه ریشه های آن با ۴ و ۲- بر حسب مقادیر پارامتر m

چون معادله فوق را نسبت به m حل میکنیم نتیجه میشود $m = \frac{2(x^2 - 3x + 2)}{x^2 - 4x - 4}$

حال جدول و منحنی تغییرات تابع را رسم میکنیم تا حاصل شود :

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	$\frac{2}{3}$	2	4	$+\infty$
m'						0			
m	2	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$



بطوریکه ملاحظه میشود x و m جوابهای معادله مفروض عبارتست از طول نقاط تقاطع خط $y=m$ با منحنی فوق که چون آنها را نسبت به ۴ و ۲- مرتب میکنیم نتیجه ذیل بدست میآید

$$-2 < x'' < x' < 4$$

$$m < \frac{2}{15} \quad -1$$

$$-2 < x'' = x' = \frac{2}{3} < 4$$

$$m = \frac{2}{15} \quad -2$$

معادله جواب ندارد

$$\frac{2}{15} < m < 2 \quad -3$$

$$x'' < -2 < 4 < x'$$

$$2 < m < 4 \quad -4$$

$$x'' = -2 < 4 < x'$$

$$m = 2 \quad -5$$

$$-2 < x'' < 4 < x'$$

$$m > 4 \quad -6$$

مسئله ۲ - جدول و منحنی تغییرات تابع $y = 4x^3 - 3x + a$ را رسم

نموده و در عدد جوابهای معادله $4x^3 - 3x + a = 0$ بر حسب مقدار پارامتر

a بحث کنید

چون جدول تغییرات تابع فوق را رسم کنیم حاصل میشود

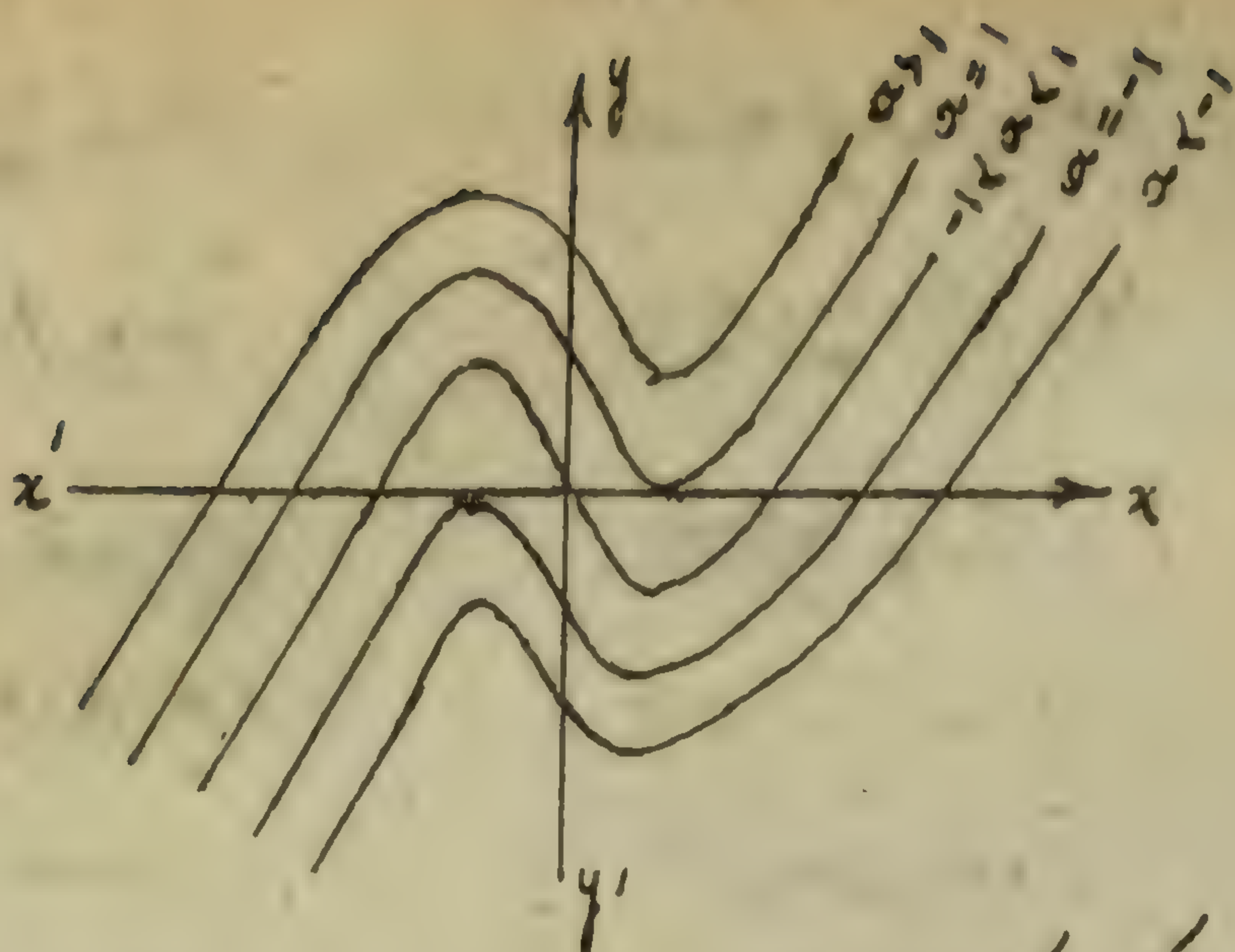
x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$a+1$	a	$a-1$	$+\infty$
		Max		min	

که بر حسب آنکه به a بستادیر $a < -1$ و $a = -1$

و $-1 < a < 1$ و $a = 1$ و $a > 1$ را بدینم منحنیهای ذیل

بدست میآید :

(۱۴۳)



حال چون ملاحظه کنیم که ریشه های معادله $4x^3 - 3x + a = 0$ طول نقاط تقاطع منحنی با محور x می باشد بنابراین عدد ریشه های معادله فوق بارها، مقادیر a بقرار ذیل خواهد بود :

یک ریشه	$a < -1$	-۱
یک ریشه مضاعف و یک ریشه ساده	$a = -1$	-۲
سه ریشه	$-1 < a < 1$	-۳
یک ریشه مضاعف و یک ریشه ساده	$a = 1$	-۴
یک ریشه	$a > 1$	-۵

طریقه مستقیم برای تعیین ماکزیموم و مینیموم بعضی توابع

۷۷- همواره میتوان بدون استعمال مشتق ماکزیموم و مینیموم بعضی توابع را

تعیین نمود ازین قرار :

مسئله ۱ - مطلوب است تعیین ماکزیموم و مینیموم تابع
 $y = \frac{x^4 + 2x - 3}{x^2 - 2x + 3}$ بدون استعمال مشتق

تابع فوق را نسبت به مرتب میکنیم تا حاصل شود :

$$(y-1)x^4 - 2x(y+1) + 3(y+1) = 0$$

حال ریشه های معادله فوق عبارتست از طول نقاط تقاطع خط بعرض y با منحنی مفروض و چون در نقاط ماکزیموم و مینیموم خط بعرض y بر منحنی مماس است بنابراین ماکزیموم و مینیموم تابع مقادیری از y میباشند که بازه آنها معادله درجه دوم فوق دارای ریشه مضاعف میباشد از سبقت برای بدست آوردن ماکزیموم و مینیموم تابع در معادله درجه دوم فوق Δ را مساوی صفر قرار میدهم تا حاصل شود :

$$\Delta = (y+1)^2 - 3(y^2-1) = -2(y^2 - y - 2)$$

که ریشه های آن عبارتست از $y' = 2$ و $y'' = -1$ و برای آنکه $\Delta \geq 0$ باشد لازم است $2 \leq y \leq -1$ باشد بطوریکه 2 و -1 - برتریب ماکزیموم و مینیموم تابع مفروض میباشند

مسئله ۲ - ماکزیموم یا مینیموم تابع $y = \frac{3x^2 + 2x - 5}{(x+1)^2}$ را تعیین کنید

معادله را نسبت به x مرتب میکنیم در اینصورت حاصل میشود :

$$(y-3)x^2 - 2x(1-y) + y+5 = 0$$

که چون در آن Δ را تشکیل داده مساوی صفر قرار دهیم نتیجه میشود :

$$\Delta = (1-y)^2 - (y-3)(y+5) = 4(4-y)$$

و از آنجا $y=4$ بطوریکه از رابطه $\Delta > 0$ حاصل میشود $y < 4$

از اینقرار تابع مفروض فقط دارای ماکزیموم است مساوی ۴

مسئله ۳- معلوم کنید آیا تابع $y = \frac{x^2 - x - 4}{x - 1}$ دارای ماکزیموم یا

مینیموم میباشد یا خیر

معادله مفروض را نسبت به x مرتب میکنیم تا حاصل شود :

$$x^2 - x(y+1) + y-4 = 0$$

که چون در آن Δ را مساوی صفر قرار دهیم نتیجه میشود :

$$\Delta = (y+1)^2 - 4(y-4) = y^2 - 2y + 17$$

که دارای جواب نمیشود بنابراین y محدودیتنی را دارا نبوده و تابع

مفروض نه دارای ماکزیموم است و نه مینیموم

موارد استعمال مشتق در حرکات *

۷۸ - تعریف - نقطه را نسبت به دستگاه مقایسه در حرکت گویند هرگاه وضعیت

نسبی آن نسبت به دستگاه مفروض تغییر کند

۷۹ - مسیر نقطه - حرکت مستقیم الخط و حرکت منحنی - مکان نقاطی

را که نقطه متحرک در فضا طی سینماید مسیر متحرک می نامند و بر حسب آنکه مسیر نقطه

خط مستقیم یا منحنی باشد حرکت را مستقیم الخط یا منحنی گویند

۸۰ - معادله حرکت - هرگاه فرض کنیم محور x مسیر نقطه متحرک M باشد

چون نقطه ثابتی مانند O در روی مسیر فوق



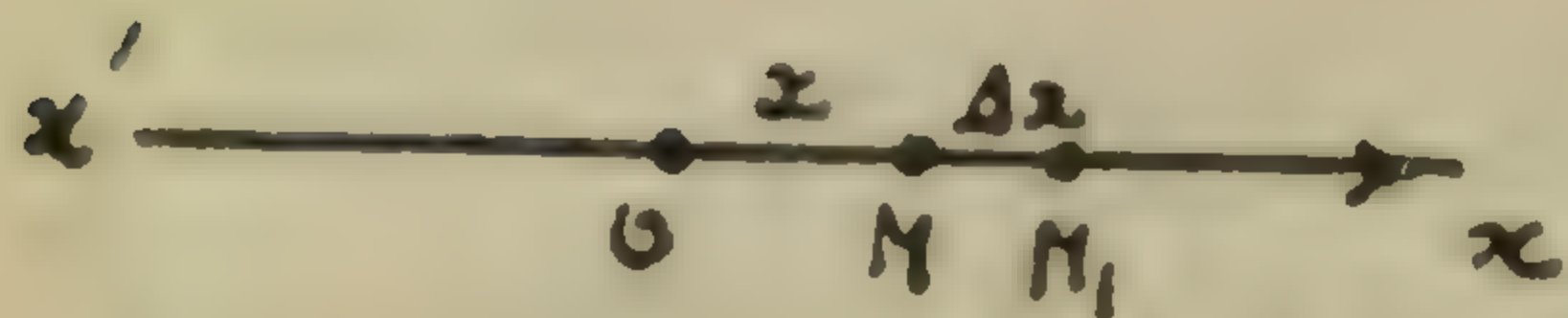
فرض کنیم فاصله OM تابعی از زمان خواهد بود که چون آنرا x فرض کنیم حاصل میشود $x = f(t)$ معادله حرکت آن $x = f(t)$ را معادله حرکت گویند

هرگاه علاوه بر مسیر متحرک M معادله حرکت آن $x = f(t)$ درست باشد وضع متحرک در هر زمان در روی مسیر خود بدست می آید چه هر زمان را که در معادله فوق قرار دهیم x نظیر آن حساب شده و مکان نقطه M در روی مسیر مشخص میگردد

* چون در پرگرام مکانیک این بحث بقدر کافی مورد بحث واقع میگردد لذا در اینجا بذکر مختصری از حرکت مستقیم نقطه اکتفا مینمائیم

۱۱- سرعت - فرض میکنیم $x = f(t)$ معادله حرکت نقطه M

در روی محور x باشد حال اگر موضع



متحرک را در زمان t در نقطه M بفاصله

$OM = x$ و در زمان $t + \Delta t$ در نقطه M_1 بفاصله $OM_1 = x + \Delta x$

فرض کنیم نسبت $\frac{MM_1}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ ، سرعت متوسط نقطه M در فاصله

MM_1 و یا در فاصله زمانی Δt بعد از زمان t میماند و آنرا با اینصورت

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

می نویسند حال اگر فرض کنیم Δt میل کند به صفر نقطه M_1 میل میکند به سمت M

و چون x تابعی است از زمان حد نسبت فوق عبارت میگردد از $x' = \frac{dx}{dt}$

ولی چون نسبت مزبور همواره سرعت متوسط متحرک در فاصله MM_1 میباشد لذا

حد آن سرعت متحرک در نقطه M خواهد بود که چون آنرا v فرض کنیم حاصل شود $v = \frac{dx}{dt}$

سرعت نقطه M را عموماً بحالی غایش میدهند که مبدأ آن M و امتداد و

جهت آن امتداد و جهت حرکت و کلیت آن مسامی $\frac{dx}{dt}$ باشد

۱۲- حرکت مستقیم و معکوس - تعیین جهت حرکت از روی علامت

سرعت - هرگاه نقطه M در جهت محور x حرکت کند حرکت آنرا

مستقیم و اگر در خلاف جهت محور حرکت نماید حرکت آنرا معکوس گویند
 حال ملاحظه میکنیم که در حرکت مستقیم x بحسب زمان تابع صعودی و بنا بر این
 مثبت و در حرکت معکوس x بحسب زمان نزولی و بنا بر این منفی
 میباشد بطوریکه برای تحقیق آنکه حرکت نقطه در چه فاصله زمانی مستقیم
 و در چه فاصله زمانی معکوس میباشد کافیت که علامت سرعت را که مشتق
 معادله حرکت است تحقیق نماییم در هر فاصله که سرعت مثبت باشد
 حرکت مستقیم و در هر فاصله که منفی باشد حرکت معکوس خواهد بود ضمناً
 زمانی که سرعت تغییر علامت میدهد زمانی است که متحرک در حرکت خود تغییر

جهت میدهد

۸۳- حرکت متشابه و حرکت متغیر - هرگاه سرعت نقطه ثابت
 باشد حرکت را متشابه و اگر بر حسب زمان تغییر کند حرکت را متغیر گویند
 چون سرعت مشتق معادله حرکت است بنا بر این نتیجه میشود
 که معادله حرکت متشابه بر حسب زمان تابعی است از درجه اول بطوریکه
 اگر سرعت ثابت متحرک را v فرض میکنیم معادله حرکت بصورت

$$x = vt + x_0$$
 خواهد بود (۱) مقداریت ثابت که

برای تعیین آن در معادله فوق فرض میکنیم $t=0$ باشد در این صورت
 $x=x_0$ میگردد یعنی x_0 عبارت است از طول نقطه M در
 زمان $t=0$ بنابراین اگر فرض کنیم متحرکی با سرعت ثابت v
 در زمان $t=0$ از مبدأ O حرکت نماید معادله حرکت آن بصورت
 $x=vt$ خواهد بود

۸۴- شتاب - فرض میکنیم موضع متحرک در زمان t در نقطه M و سرعت
 آن در این زمان v و در زمان $t+\Delta t$ در نقطه M_1 و سرعت آن
 در این زمان $v+\Delta v$ باشد در این صورت نسبت $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ را شتاب
 متوسط در فاصله MM_1 و یا در فاصله زمانی Δt بعد از زمان t
 مینامند و آن را باین صورت مینویسند:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

حال اگر فرض کنیم Δt میل کند به سمت صفر نقطه M_1 میل میکند به سمت M
 و حد نسبت فوق چون v تابعی است از t عبارت میگردد از
 $v' = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ که آنرا شتاب متحرک در زمان t و یا در
 نقطه M مینامند

از این قرار مشتق اول معادله $x = f(t)$ معادله سرعت و
 مشتق ثانی آن معادله شتاب خواهد بود
 ۸۵- حرکت مسرعه و حرکت مبطئه - در حرکت متغیر هرگاه
 قدر مطلق سرعت ترقی کند حرکت را مسرعه و اگر متنازل نماید حرکت
 را مبطئه گویند

حال بنا بقریف فوق در حرکت مسرعه v^2 بر حسب زمان تابع صعودی
 و در حرکت مبطئه v^2 بر حسب زمان تابع نزولی میباشد بطوریکه برای
 تحقیق آنکه حرکت نقطه در چه زمان مسرعه و در چه زمان مبطئه است کافی است
 معلوم کنیم که تابع $v^2 = y$ در چه زمان صعودی و در چه زمان نزولی است
 و چون مشتق آن $y' = 2v \times v' = 2v \times a$ میباشد بنا بر این کافی است
 که علامت $v \times a$ را تحقیق کنیم در این صورت در هر فاصله زمانی که
 $v \times a$ مثبت باشد حرکت مسرعه و در هر زمانی منفی باشد حرکت مبطئه
 خواهد بود

۸۶- بحث در حرکت نقطه - هرگاه فرض کنیم که محور x مسیر نقطه
 متحرک M باشد مقصود از بحث در حرکت نقطه آنست که در صورت معلوم

بودن معادله حرکت آن $x = f(t)$ تحقیق کنیم در چه زمان حرکت
 مستقیم یا معکوس و در چه زمان سرعت یا مسبطه است و بطوریکه گفتم این مقصود
 با تحقیق علامت v و علامت a بدست میآید

۸۷- دیاگرام حرکت و سرعت و شتاب - چون در معادلات

$x = f(t)$ و $v = f'(t)$ و $a = f''(t)$ متغیر را زمان x
 و v و a را تابع آن فرض نموده نمایش هندسی تغییرات توابع فوق
 را رسم کنیم خطوطی حاصل میشود که آنها را دیاگرام حرکت و سرعت و
 شتاب مینامند و از روی آنها همواره ممکن است در هر زمان x و v
 و a را بوسیله ترسیم بدست آورد

برای توضیح مطالب فوق مثال ذیل را حل میکنیم :

مثال - مطلوب است بحث در حرکت مستقیم الخط $x = t^3 - 3t^2$ در کم
 دیاگرام حرکت و سرعت و شتاب

معادله سرعت $v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t$ و معادله شتاب

$a = \frac{dv}{dt} = 6t$ میباشد که جوابهای هر یک را تعیین میکنیم و علامت آنها

و همچنین علامت a و x را در فواصل جوابها در جدول ذیل ترتیب داده

و از مقایسه آنها بحث مطلوب را نتیجه بگیریم ازینقرار :

t	$-\infty$	-1	0	$+1$	$+\infty$
v	+	0	—	0	+
a	—	—	0	+	+
av	—	0	+	0	+
نتیجه	مستقیم - مبطله	مکوس - سرعت	مکوس - مبطله	مکوس - سرعت	مستقیم - سرعت

حال برای رسم دیاگرام حرکت منحنی تغییرات توابع $x = t^3 - 3t$ و

$v = 3t^2 - 3$ و $a = 6t$ را رسم میکنیم

آزروسی دیاگرام فوق همواره میتوان

x و v و a را در هر زمان بدست

آورد مثلاً چون در روی محور $t-t'$

طول $OP = \frac{1}{4}$ را جدا نموده و از

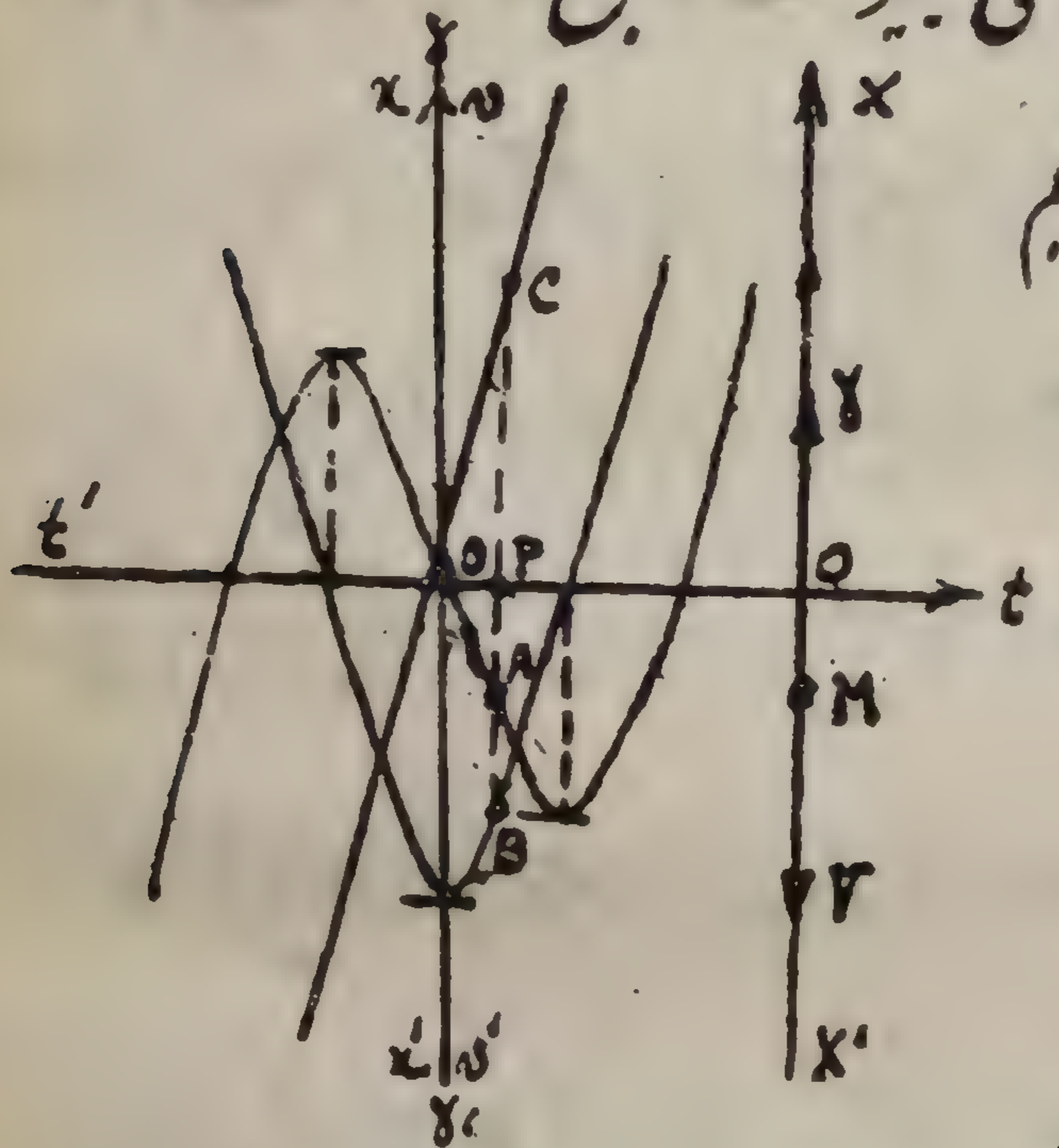
نقطه P عمودی بر محور $t-t'$ اندراج کنیم تا خطوط فوق را در نقاط A و

B و C قطع نماید PA نماینده طول نقطه و PB نماینده سرعت آن

و PC نماینده شتاب متحرک در زمان $t = \frac{1}{4}$ میباشد بطوریکه هرگاه

محور $x-x'$ سیر متحرک باشد وضع نقطه M در این زمان بصورتی است

که در شکل ملاحظه میشود



۸۸- حرکت قشابه تغییر - هرگاه در حرکت تغییری شتاب ثابت باشد
حرکت را قشابه تغییر می‌نامند

ازینقرار هرگاه شتاب حرکتی ثابت و مساوی λ باشد معادله سرعت آن

$$v = \lambda t + v_0 \quad \text{و معادله حرکت آن} \quad x = \frac{1}{2} \lambda t^2 + v_0 t + x_0 \quad \text{خواهد بود}$$

(v_0 و x_0 مقادیر ثابتی هستند که برای محاسبه آنها در معادلات سرعت و حرکت

نقطه M را مساوی صفر قرار میدهم در اینصورت نتیجه میشود $v = v_0$ و

$x = x_0$ یعنی v_0 و x_0 بر ترتیب سرعت و طول متحرک در زمان $t=0$ میباشد

بطوریکه اگر فرض کنیم متحرکی در زمان $t=0$ از مبدأ 0 بدون سرعت اولیه و با شتاب

λ حرکت نماید معادله سرعت آن $v = \lambda t$ و معادله حرکت آن $x = \frac{1}{2} \lambda t^2$ خواهد بود

مثال حرکت قشابه تغییر - حرکت اجسام در تحت تأثیر قوه

ثقل حرکت قشابه تغییر است با شتاب ثابتی که آنرا g فرض نمایند و مقدار

آن در طهران $9,79$ متر و در پاریس $9,81$ متر میباشد بنابراین چون

جسمی را بطور آزاد رها کنیم در امتداد قائم ساقط میشود و معادله حرکت آن

بصورت $x = \frac{1}{2} g t^2$ میباشد و در صورتیکه آنرا با سرعت v_0 در امتداد

قائم برتاب کنیم معادله حرکت آن بصورت $x = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t$ خواهد بود.

$$y = 4m^2 - 1$$

$$y = 4m^2 - 1$$

$$\begin{array}{r|rrrr} x & -4 & 0 & 0 & -1 \\ \hline y & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}$$

(۱۵۴)

سائل

۱۳ - جدول و منحنی تغییرات توابع ذیل را رسم کنید: و اگر ممکن باشد این توابع را رسم کنید

$$y = 2x^2 - 1$$

$$y = 3x^2 + 5x - 1$$

$$y = x^2 - 1x + 12$$

$$y = -5x^2 + 13x - 6$$

$$y = \frac{-2x + 6}{3x + 7}$$

$$y = \frac{-5}{3x - 2}$$

- ۱۴

$$y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$y = x^2 + 2x^2 - 1$$

$$y = \frac{1}{x^2 + 2x^2 - 1}$$

$$y = -4x^2 + 5x^2 - 1$$

$$y = (x-2)^2(x+3)(x-4)$$

$$y = x(x-1)^2$$

- ۱۵

$$y = x(a^2 - x^2)$$

$$y = \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2}$$

$$y = \frac{1}{3 - 2x^2 + x^4}$$

$$y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 11x + 10}$$

$$y = \frac{x^2}{x+1}$$

$$y = \frac{(x-2)^2}{(x-1)^2}$$

- ۱۶

$$y = \frac{(x+2)^2}{(x+3)^2}$$

$$y = \frac{x^2 - 29x + 120}{x^2 - 22x + 121}$$

$$y = \frac{x^2 - 5x + 6}{3x - 2}$$

$$y = \frac{2x^2 + 3x + 2}{x^2 + 5x - 6}$$

$$y = \frac{x-1}{x^r + rx + a}$$

$$y = \frac{rx^r - 10x + 9}{rx - 1} \quad -1v$$

$$y = \frac{x^r - rx}{x^r - rx + r}$$

$$y = \frac{x^r + x^r - 1}{x^r + rx^r + 1}$$

$$y = \frac{x^r - rx + r}{x^r - x + r}$$

$$y = \frac{(x+1)^r}{(x-1)^r}$$

$$y = \sqrt{x-1}$$

$$y = \sqrt{x^r - ax + r} \quad -11$$

$$y = \sqrt{x(x-1)}$$

$$y = \sqrt{rx(x-r)}$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{a^r - x^r}}$$

$$y = r(x+1) + r\sqrt{-x^r - x + r}$$

$$y = \frac{a+x}{x-z} - \frac{b+x}{b-x}$$

$$y = (rx-1)(x-1)^r(x+a)^r - 19$$

$$y = (r-x)^r \sqrt{(r-rx)^r}$$

$$y = \frac{x}{(1+x^r)^{\frac{r}{r}}}$$

$$y = x^r(a-x)^r$$

$$y = x-1 + \sqrt{(n-1)x^r - rx + m}$$

$$y = \frac{x^r - a}{\sqrt{x^r - x^r}}$$

$$y = \frac{x^r}{\sqrt{x^r + 1}} \quad -90$$

$$y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$$

$$y = -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^r + 1}}$$

$$y = \sqrt{\frac{rx^r + rx + r}{x^r + rx + r}}$$

$$y = \sqrt{x} - \sqrt{x-1} \quad -91$$

$$y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$$

$$y = \sqrt{a+rx} - \sqrt{rx-v}$$

$$y = (1-x)(r+x)^{\frac{r}{r}}$$

$$y = (x^r - rx - 1)\sqrt{x^r + rx - 1}$$

۹۲ - مطلوب است اولاً رسم جدول و منحنی تغییرات تابع $y = x^2 - 4x + 9$

ثانیاً خطی موازی منصف الزاویه xoy محور $y'y'$ را در نقطه a قطع میکند

معادله این خط را تعیین کنید ثالثاً در عدد نقاط تقاطع این خط با منحنی بحث کنید

۹۳ - تابع $y = -x^2 + 5x - 4$ مفروض است اولاً جدول و منحنی تغییرات آن را رسم

کنید ثانیاً مطلوب است معادلات خطوطی که از مبدأ بر منحنی فوق مماس گردد و همچنین زاویه حادثه

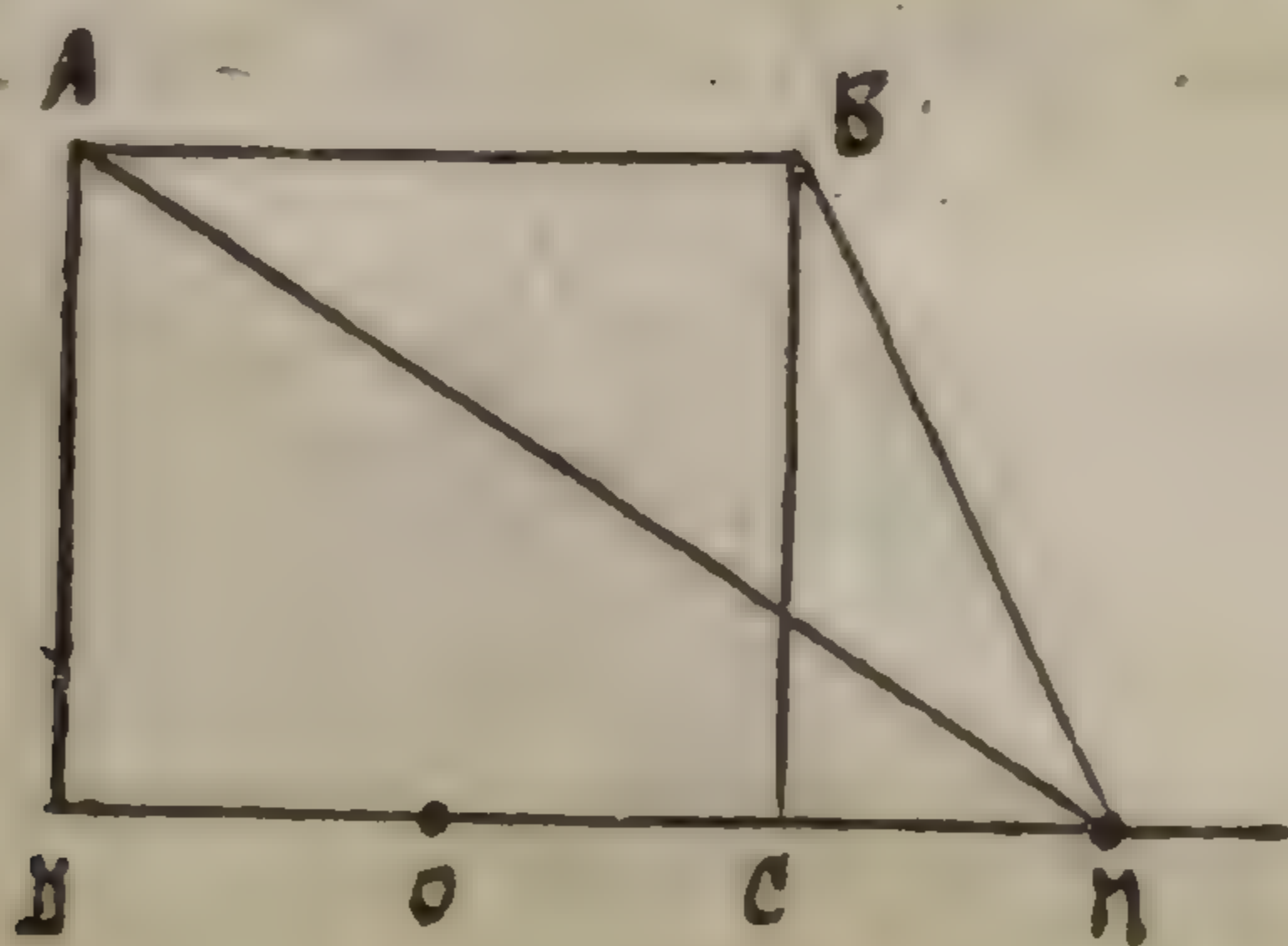
مابین دو مماس و معادله خط واصل مابین نقاط تماس را تعیین نمایند

۹۴ - مطلوب است اولاً رسم جدول و منحنی تغییرات تابع $y = \frac{2x+1}{x-1}$

ثانیاً خط $y = mx$ مفروض است مقدار m را بطریقی تعیین کنید که خط منحنی را

در دو نقطه قطع نموده و یا بر آن مماس گردد

۹۵ - مربع $ABCD$ بصلع a مفروض است در استداد DC نقطه متغیری



مانند M اختیار نموده و فرض میکنیم

نقطه O وسط DC و $OM = x$ باشد

مطلوب است رسم جدول و منحنی تغییرات

$$y = \frac{MA^2}{MB^2}$$

تعیین مقدار x بطریقی که نسبت فوق ماکزیموم باشد

۹۶ - اولاً جدول و منحنی تغییرات تابع $y = x + 1 + \frac{1}{x}$ را رسم کنید

ثانیاً خط $x + y = a$ را فرض میکنیم مطلوب است بحث در نقاط تقاطع این خط

با منحنی بر حسب مقادیر α

$$16 - 2x^2 - 16x + 4y + 2 = 0$$

$$97 - \text{معادله درجه دوم}$$

مفروض است مطلوبت اولاً مقایسه ریشه های آن با ۱ و ۲ - بر حسب مقادیر y
ثانیاً معادله را نسبت به y حل نموده جدول و منحنی تغییرات تابع حاصل را رسم کنید و آن
روی آن بحث فوق را مشروح بگیرید

$$y = \frac{2x-1}{x^2-x+1}$$

۹۸ - مطلوبت اولاً رسم جدول و منحنی تغییرات تابع
ثانیاً خطی موازی محور x منحنی را در دو نقطه قطع مینماید وضعیت خط را مشخص نماید
برای آنکه نقاط تقاطع بفاصله معینی از یکدیگر واقع باشند

۹۹ - دو محور قائم ox و oy و دایره بشاع R و مرکز A واقع در روی ox مفروض
است بطریقیکه $OA = \alpha$ میباشد مماس BC را بر دایره رسم میکنیم تا oy را
در نقطه B و ox را در نقطه C قطع نماید و فرض میکنیم $OC = x$ باشد و اینصورت
مطلوبت تغییرات y سطح مثلث OBC هرگاه x تغییر کند بازنگاه $R = 6\alpha$
فرض شود

$$100 - \text{جدول و منحنی تغییرات تابع } y = \frac{(x-4)^2}{x^2(x-1)} \text{ را رسم نموده و در عدد}$$

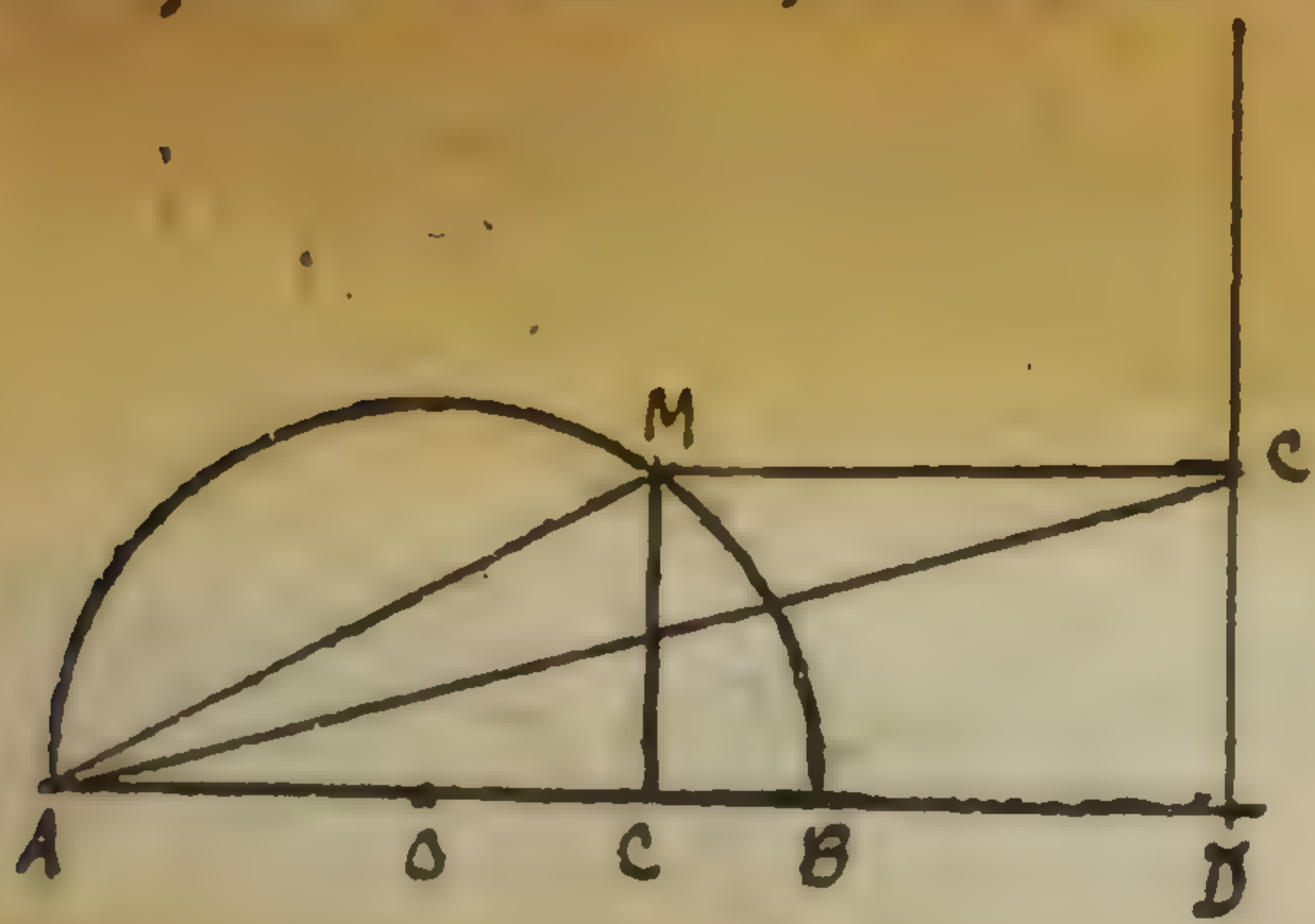
جوابهای معادله $\alpha x^2(x-1) - (x-4)^2 = 0$ بر حسب مقادیر پارامتر
 α بحث کنید

$$101 - \text{تابع } y = \frac{1}{x-1} - \frac{x}{x-2} \text{ مفروض است اولاً جدول و منحنی تغییرات آن را}$$

رسم کنید ثانیاً معادله $\frac{1}{x-1} - \frac{4}{x-2} = m$ را فرض میکنیم در وجود و علامت
ریشه های آن بر حسب مقدار m بحث نموده و این بحث را با منحنی فوق تطبیق نمایند
مثلاً هرگاه عدد m ریشه های معادله فوق باشند مابین آنها رابطه یقین کنید که بشکلی
بمقدار m منداشته باشد

۱۱۲- سه جمله $y = mx^2 + (1-2m)x + 2m$ مفروض است اولاً مقدار x را حساب کنید
که باز آن $y = 1$ باشد ثانیاً هرگاه x را جواب مشتق فرض نموده و مقدار نظیر آنرا
برای تابع y فرض کنیم مطلوبیت محاسبه x و y بر حسب m و همچنین محاسبه y بر حسب
 x و رسم جدول و منحنی تغییرات y بر گاه x تغییر کند

۱۱۳- نیمه دایره بر مرکز O و قطر $AB = 2R$ و نقطه D واقع بر استداد AB فاصله



مفروض است $OD = 2R$

از نقطه D عمودی بر AB اخراج

نموده و نقطه مانند M بر محیط بنماید

اختیار میکنیم و از این نقطه MC را بر خط

مفروض عمود میسازیم مطلوبیت اولاً تغییرات سطح مثلث AMC بر گاه M محیط بنماید

را طی کند ثانیاً وضعیت نقطه M نظیر ماکزیموم سطح فوق را بوسیله ترسیم مشخص نماید

۱۱۴- مطلوبیت اولاً رسم جدول و منحنی تغییرات تابع $y = \frac{x^2 - 4x - 4}{x}$

ثانیاً یقین نقطه از منحنی که ماکس بر آن با جهت x زاویه 45° تشکیل دهد

ثالثاً تحقیق کنید که خطی موازی ox میتوان بدست آورد بطریقی که فاصله هر نقطه از منحنی

مانند m از آن خط و از نقطه ثابت $F(r, 1)$ مساوی باشد

۱۰۵- تابع $y = \frac{x^2 - x}{x - 2}$ مفروض است اولاً جدول و منحنی تغییرات آن را رسم کنید

ثانیاً هرگاه y مقدار معلومی فرض شود مساوی x در آن نسبت به x مرتب نموده در وجود

و علامت ریشه های آن بحث کنید ثالثاً هرگاه فرض کنیم خط \parallel موازی محور ox خط

$x = 2$ را در نقطه A و منحنی را در نقاط M' و M'' قطع کند ثابت کنید که $AM' \times AM''$

هرگاه \parallel بموازات خود حرکت کند مقدار ثابت

۱۰۶- دو خط $2x - 3y = 4$ و $m(x - y) = 1$ مفروض است مطلوب است

اولاً محاسبه مختصات نقطه A محل تقاطع دو خط بر حسب m ثانیاً رسم جدول و منحنی

تغییرات ضریب زاویه خط OA هرگاه m از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند ثالثاً تحقیق کنید

که هر خط موازی مماس بر الزاویه xy منحنی را در دو نقطه قطع میکند و حساب کنید

عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی که هرگاه نقاط M' و M'' محل تقاطع خط با منحنی نقطه

Q نقطه تقاطع آن با محور xy باشد نقاط M' و M'' نسبت به Q قرینه باشند

۱۰۷- نیم دایره بر مرکز O و بقطر $AB = 2R$ و دوزنقه $ABCD$ محاط در آن مفروض

است مطلوب است اولاً محاسبه سطح این

دوزنقه بر حسب R و $\frac{CD}{R} = x$

و تغییرات آن هرگاه x تغییر کند



ثانیاً مطلوبت زاویه مرکزی \cos نظیر ماکزیموم این سطح

۱۰۸- تابع $y = \frac{ax+1}{x+b}$ مفروض است مطلوبت اولاً محاسبه a و b

بطریقی که هرگاه x میل کند به سمت صفر مقدار y میل کند به سمت ∞ و همچنین اگر x

میل کند به سمت ∞ حد y مساوی ۲ گردد ثانیاً جدول و منحنی تغییرات تابع را بازاء

این مقادیر a و b رسم کنید ثالثاً مطلوبت محاسبه مختصات نقاطی از منحنی فوق

که مماس بر آنها با خط $y = -x$ موازی باشد

۱۰۹- مطلوبت اولاً رسم جدول و منحنی تغییرات تابع $y = \frac{x+1}{x-1}$

و تابع $y = \frac{1(x-1)}{x+1}$ ثانیاً دو منحنی یکدیگر را در نقاط A و B قطع میکنند

مطلوبت مختصات A و B و بحث در وجود آنها بر حسب مقادیر l ثالثاً مساوی

خط AB را تشکیل داده تحقیق کنید که خط مزبور بازاء جمیع مقادیر l بر نقطه ثابتی

مردورسینماید رابعاً مطلوبت مقدار l بطریقی که مختصات نقاط A و B مثبت و

منطق باشند

۱۱۰- تابع $y = x^3 + \frac{1}{x}$ که در آن x غایب مقدار مثبتی است مفروض است

اولاً جدول و منحنی تغییرات آن را رسم کنید ثانیاً هرگاه M یکی از نقاط منحنی MA

مماس بر آن و نقطه M نقطه تقاطع مماس با محور $x'x$ و MA عمود واردا از M

بر $x'x$ باشد طول نقطه M را حساب کنید بطریقی که $MA = \frac{3}{4} AM$ باشد

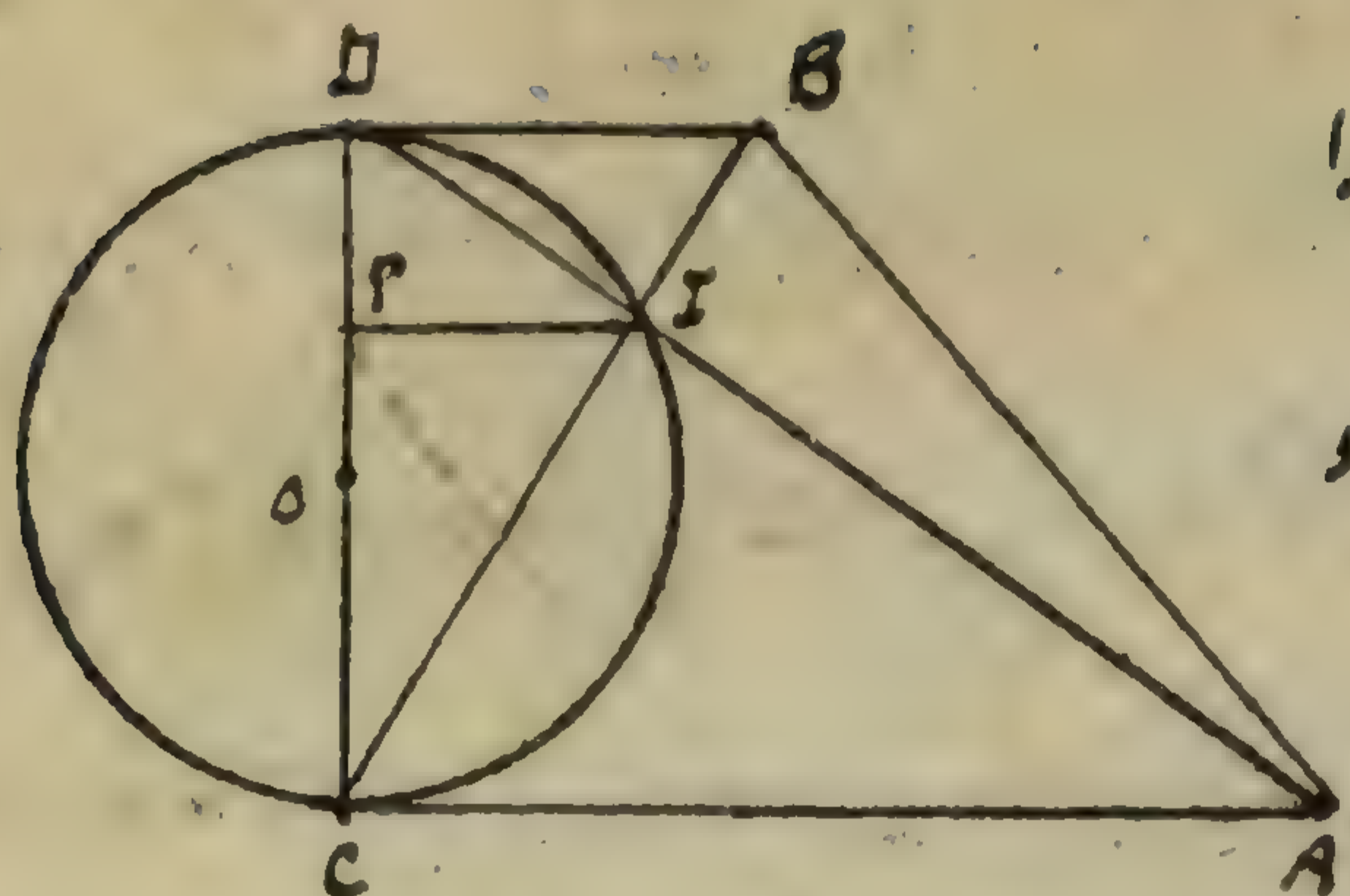
۱۱۱- دایره \odot شعاع R و دو مماس موازی CA و CB مفروض است نقطه

۴ را در روی قطر CD واصل بین دو نقطه

تاس فرض نموده از نقطه P عمود PI را

بر قطر اخراج میکنیم و قاطع CB و

DIA و خط AB را رسم میکنیم



مطلوبت تغییرات سطح دوزنفت $ABCD$

۱۲- تابع $y = \frac{x^2 + ax + b}{x^2}$ مفروض است اولاً مقدار a و b را بطریقی

تعیین کنید که تابع بازاء $x = \frac{8}{5}$ دارای ماکزیمومی مساوی $\frac{25}{16}$ باشد ثانیاً

جدول و منحنی تغییرات تابع را بازاء $a = 3$ و $b = -4$ رسم کنید ثالثاً خط

$y = m$ موازی محور x مفروض است در نقاط تقاطع این خط با منحنی بحث کنید

رابعاً هرگاه خط $y = m$ منحنی را در دو نقطه H و H' قطع کند مطلوبت تعیین

m بطریقی که زاویه $\angle HOH'$ قائم باشد

۱۳- معادله $x^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$ که در آن x مجهول و

x نمایش پارامتریت مفروض است مطلوبت اولاً بحث در وجود و علامت ریشه های

آن بر حسب مقادیر x ثانیاً هرگاه فرض میکنیم $y = c$ و $y = d$ ریشه های

معادله فوق باشند مطلوبت رسم جدول و منحنی تغییرات $y = f(x)$

ثالثاً فرض کنیم d و c زوایای متلبی باشند مقدار x را بطریقی تعیین کنید

که مشتق قائم الزاویه باشد

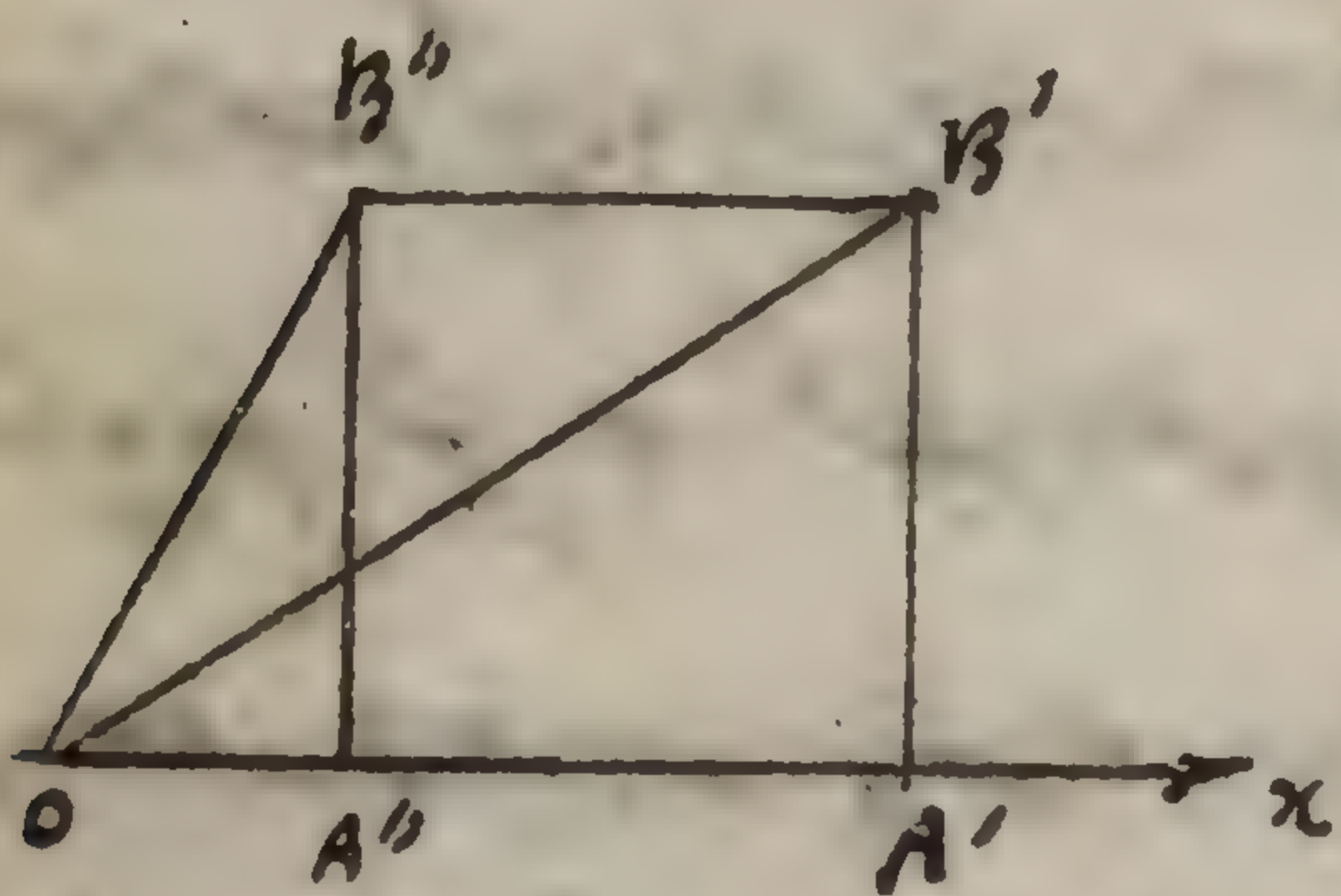
۱۱۴- معادله درجه دوم $ax^2 + (a-1)x - (a+1) = 0$

مفروض است مطلوبت اولاً بحث در وجود ریشه های آن ثانیاً هرگاه معادله دارای ریشه های حقیقی باشد محوری مانند x فرض نموده از نقطه O طول $\overline{OA'}$

را مساوی x' و $\overline{OA''}$ را مساوی

x'' ریشه های معادله فوق جدا نمود

در روی $A'A''$ مربع $A'A''B''B'$ را



بنابینیم مطلوبت تغییرات $y = \overline{OB'} + \overline{OB''}$ هرگاه a جمیع مقادیر ممکنه را دارا شود

۱۱۵- تابع $y = \frac{x^2 - 5bx + 4a}{4ax^2 - 5bx + 1}$ که در آن a و b مختصات نقطه

M واقع در سطح دو محور قائم میباشد مفروض است مطلوبت مکان نقطه M برای

آنکه تابع فوق در دارای ماکزیموم و نه دارای مینیموم باشد

۱۱۶- تابع $y = \frac{x^2 - 5bx + 4a}{4ax^2 - 5bx + 1}$ مفروض است معلوم کنید مکان نقطه

$M(a, b)$ را برای آنکه منحنی تغییرات تابع فوق دارای یک ماکزیموم و مینیموم باشد

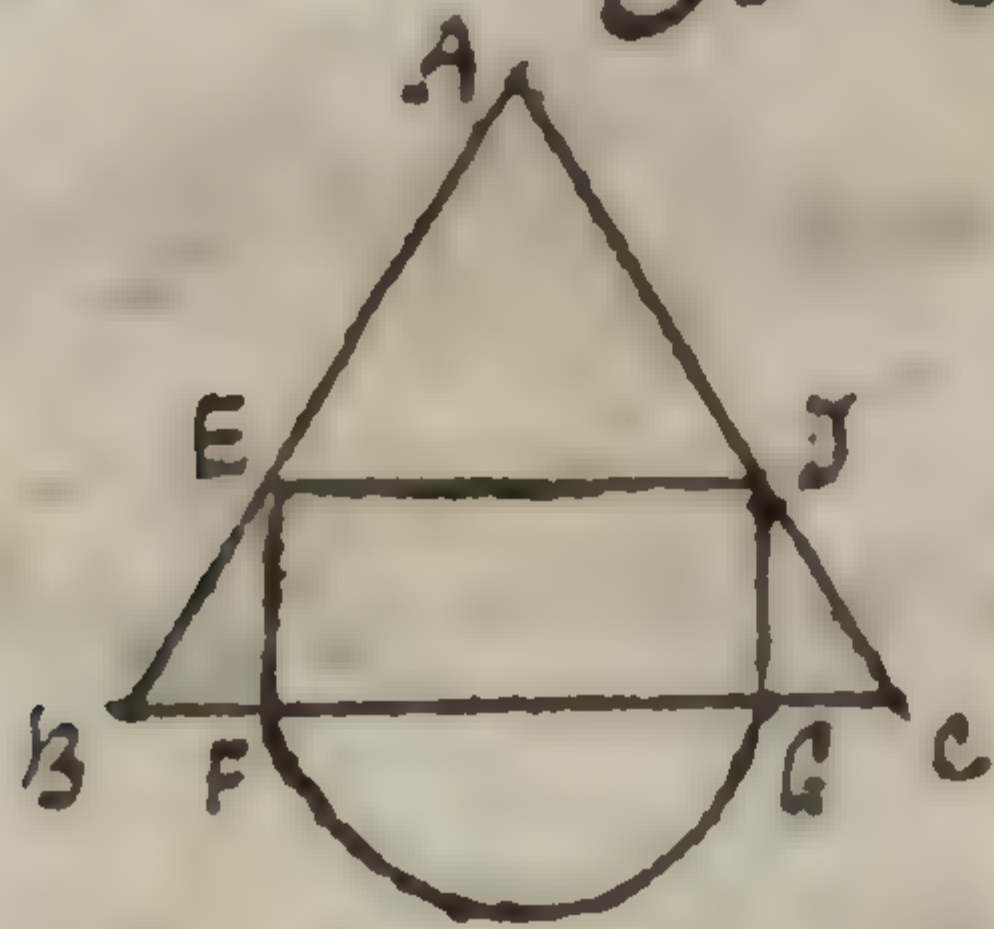
۱۱۷- تابع $y = \frac{x^2 + 24x + 9}{x^2 + 1}$ مفروض است اولاً تحقیق کنید که دو نقطه

در روی منحنی یافت میشود که ماس بر آنها با محور x موازیست و ثابت کنید که حاصل

ضرب طول دو نقطه فوق x و x' برابر است با ۱- ثانیاً p و q را حساب کنید

بطریقی که بازا، $x=2$ $y=0$ و بازا، $x=1$ $y=2$

ثالثاً جدول و منحنی تغییرات تابع فوق را بازا این مقادیر p و q رسم کنید
 ۱۱۸- مثلث متساوی الاضلاع ABC بضلوع او مربع مستطیل $DEFG$ محاط در آن



مفروض است در روی FG و در خارج مثلث

نیم دایره رسم میکنیم و با شکل نمیدایره با مرتب

مستطیل فوق تشکیل دوره کشیر الاضلاع را

بمید مطلوبت تغییرات سطح محدود بدوره فوق هرگاه R شعاع نیم دایره تغییر کند

۱۱۹- تابع $y = \frac{2x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2}$ مفروض است مطلوبت اولاً رسم جدول و

منحنی تغییرات آن ثانیاً معادله و رسم مماس بر منحنی در نقطه $x=0$ ثالثاً خطی موازی

$x'x$ بر عرض y منحنی را در نقاط بطول x' و x'' قطع مینماید مطلوبت محاسبه

$x' + x''$ و $x'x''$ بر حسب y و اثبات آنکه $\frac{1}{x'+1} + \frac{1}{x''+1}$ ثابت و شبکی

بمقدار y ندارد

۱۲۰- اولاً ثابت کنید که مقداری مانند a یافت میشود بطریقیکه بازا هر مقدار m

بفرض آنکه $m < a$ باشد سه جمله $y = mx^2 + (m-1)x + m-1$

بازا بر جميع مقادیر x منفی باشد ثانیاً مطلوبت رسم جدول و منحنی تغییرات تابع

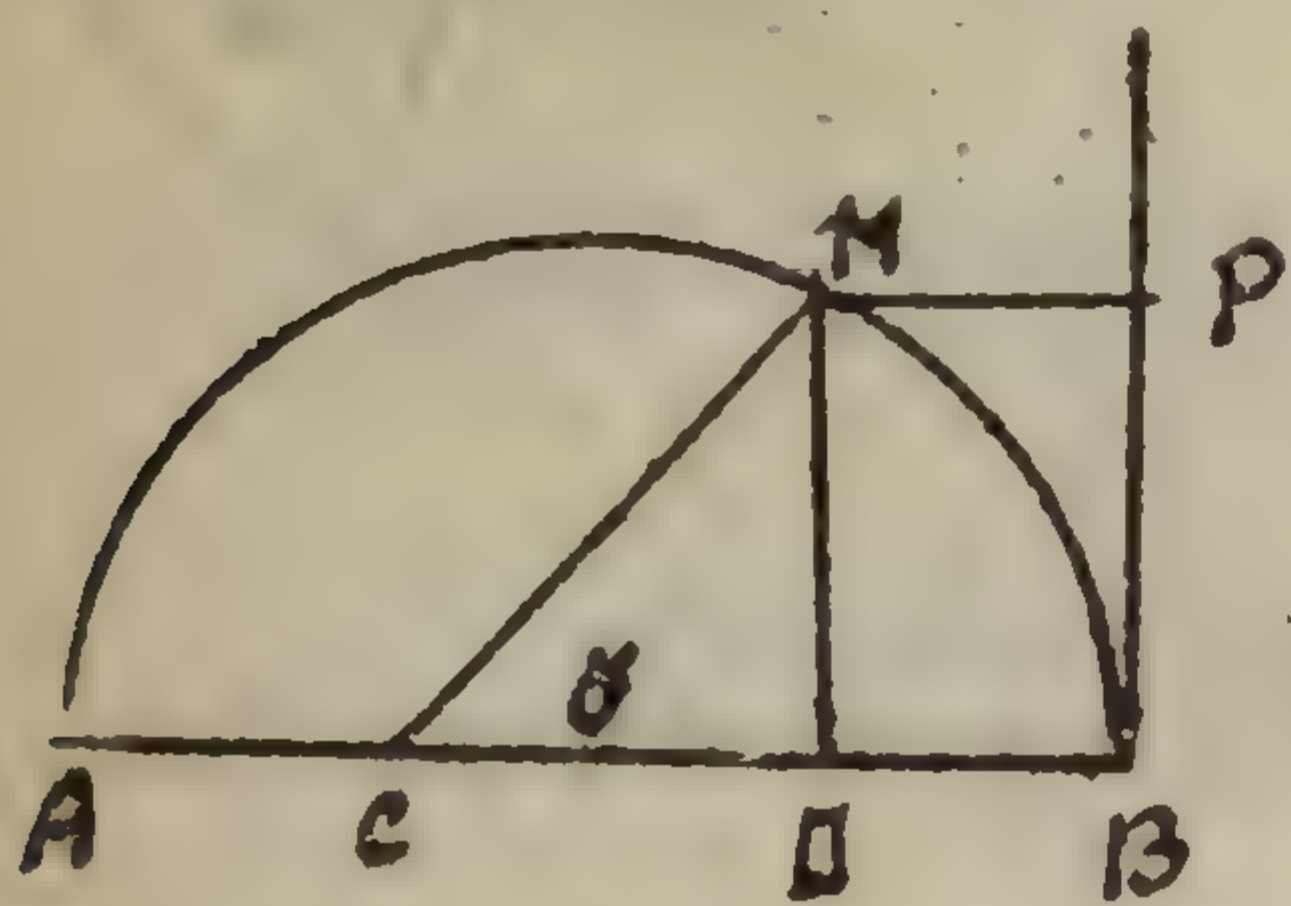
$$y = ax^2 + (a-1)x + a-1$$

۱۲۱- تابع $y = \frac{ax+1}{(x-1)^2}$ مفروض است اولاً مقدار a را بطریقی

تعیین کنید که مماس بر منحنی در نقطه $x=0$ با خط $x+4y=0$ موازی گردد

ثانیاً جدول و منحنی تغییرات تابع را با زاویه این مقدار رسم کنید ثالثاً خط $y = m$ مفروض است مقدار m را بطریقی تعیین کنید که خط مذکور منحنی را در دو نقطه A' و A'' قطع نماید همچنین مطلوب است محاسبه مقدار m بطریقی که طول نقطه A وسط $A'A''$ مساوی مقدار معلوم شود

۱۲۲- نیمه دایره بر مرکز O و بقطر $AB = 2R$ و در روی قطر مذکور نقطه C



وسط A مفروض است نقطه مانند M

در روی نیمه دایره فرض نموده MD را بر

AB عمود میکنیم و فرض میکنیم $AO = x$ باشد

مطلوب است اولاً محاسبه MC بر حسب R و x ثانیاً MP را بر ماس بر نیمه دایره

در نقطه B عمود میکنیم مطلوب است تغییرات $y = MC' + MP'$ ثالثاً از روی منحنی

فوق مقادیر x را بطریقی تعیین کنید که y مساوی مقدار معلوم m باشد (بحث)

۱۳۳- تابع $y = x^2 - 2x + 5$ مفروض است مطلوب است تعیین x برای

آنکه اولاً منحنی با محور x مماس گردد ثانیاً برای آنکه محور y را در نقطه بعرض ۲

قطع کند ثالثاً با منصف الزاویه xoy مماس شود رابعاً طولهای نقاط تقاطع

آن با خط $y = 2$ ریشه های معادله $x^2 - 2x - 2 = 0$ باشد خامساً محور

تقاطع منحنی را تعیین نماید سادساً تحقیق کنید که نقطه مانند M در روی منحنی فوق

یافت میشود که مماس بر آن موازی محور x میباشد و مختصات این نقطه را تعیین

نموده و معادله مکان آنرا هرگاه a تغییر کند معلوم کنید و آنرا رسم نمایید

۱۲۴- مطلوبست اولاً رسم جدول و منحنی تغییرات تابع $y = x^3 + 2x^2 - 4$

ثانیاً رسم جدول و منحنی تغییرات $y = -x^2$ در روی همان دو محور و تحقیق آنکه

طول نقاط تقاطع دو منحنی ریشه های معادله $(x-1)(x+2)^2 = 0$ میباشد

همچنین عرض نقاط تقاطع را معلوم کنید ثالثاً مطلوبست محاسبه ϕ زاویه حادثه مابین دو منحنی در نقاط تقاطع آنها

۱۲۵- دو کره متحد المركز یکی شعاع x دیگری شعاع $x+1$ مفروض است مطلوبست

اولاً محاسبه v حجم مابین دو کره ثانیاً شعاع x را طوری تعیین کنید که $v = \frac{32}{3}\pi$

باشد (بحث بر حسب مقادیر مثبت x) ثالثاً مطلوبست رسم منحنی تغییرات

$y = v$ و حل و بحث گرافیک سؤال دوم

۱۲۶- تابع $y = (x-a)(x-b)(x-c)$ که در آن $a < b < c$ فرض

شده مفروض است مطلوبست اولاً محاسبه y' و تحقیق آنکه معادله $y' = 0$

دارای یک ریشه مابین a و b و یک ریشه مابین b و c خواهد بود ثانیاً

تحقیق کنید حالت خاصی را که $a = b$ باشد ثالثاً بفرض آنکه $a = b = -1$

و $c = 0$ باشد جدول و منحنی تغییرات تابع را رسم کنید

۱۲۷- مطلوبست اولاً رسم جدول و منحنی تغییرات $y = \frac{(x-3)^2}{x^2 - 7x + 10}$

ثانیاً نقطه مانند M_1 بطول x در روی منحنی مفروض است ثابت کنید که نقطه دیگری

مانند M_1 بهمان عرض در روی منحنی یافت میشود و در اینصورت x طول نقطه M_1 را
بر حسب x_1 حساب کنید ثالثاً نقطه $A(3, 0)$ مفروض است مطلوبست تشکیل
معادله خط AD که از نقطه A با ضریب زاویه m مرور نماید را بآیا m را بطریقی
تعیین کنید که خط AD منحنی را در دو نقطه p و q قرینه یکدیگر نسبت به O قطع نماید

۱۲۱- تابع $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$ مفروض است اولاً رابطه مابین ضرایب

فوق تعیین کنید برای آنکه تابع نه دارای ماکزیموم و نه دارای مینیموم باشد ثانیاً
هرگاه $a = a' = 1$ باشد مطلوبست محاسبه b و c و b' و c' بطریقی که

تابع بازار $x = -1$ دارای مینیمومی مساوی -1 و بازار $x = +1$ دارای
ماکزیمومی مساوی 2 باشد ثالثاً جدول و منحنی تغییرات تابع را بازار این مقادیر
 b و c و b' و c' رسم کنید

۱۲۲- دو محور قائم Ox و Oy و نقطه A مختصات $a > 0$ و $b > 0$
مفروض است از نقطه A خطی مرور میکند که محور x را در نقطه M و محور y را در نقطه
 M' قطع میکند مطلوبست اولاً تغییرات y عرض نقطه M بر حسب x طول آن
ثانیاً تغییرات OMM' بر حسب x ثالثاً تغییرات V حجم حادث
از دوران این مثلث حول Oy بر حسب x

۱۳- مطلوبست اولاً رسم جدول و منحنی تغییرات تابع $y = \frac{x-2}{(x-1)^2}$
ثانیاً هرگاه نقاط M_1 و M_2 دو نقطه از منحنی بعرض a باشند مطلوبست تشکیل معادله

در جودومی که ریشه های آن t_1 و t_2 ضرب زاویه خطوط OM_1 و OM_2 باشد تحقیق کنید آیا ممکن است بازار مقدار یا مقداری از α دو خط OM_1 و OM_2 بر یکدیگر عمود گردند ثالثاً هرگاه فرض کنیم m_1 و m_2 ضرب زاویه خطوط مماس بر منحنی در نقاط M_1 و M_2 باشد مقدار α را تعیین کنید بطریقی که $m_1 m_2 = -\frac{\alpha^2}{r^2}$ باشد

۱۳۱- معادله $x^2 - 2xy + \alpha(y - \frac{1}{2}\alpha) = 0$ مفروض است اولاً

آنرا نسبت به y حل نموده جدول و منحنی تغییرات تابع حاصل را رسم کنید ثانیاً بازار هر مقدار y از معادله فوق دو مقدار x_1 و x_2 بدست میاید تحقیق کنید که مابین $s = x_1 + x_2$ و $p = x_1 x_2$ رابطه موجود است که بستگی بمقدار y ندارد ثالثاً مربع مستطیل فرض میکنیم که قاعده آن $x_1 - x_2$ و ارتفاعش y نظیر آن باشد حال مربع مستطیل فوق را در حول ارتفاع آن دوران میدهم مطلوبست محاسبه عبارت حجم حادث از دوران آن بر حسب α و y و تغییرات آن هرگاه y تغییر کند

۱۳۲- معادله $mx^2 - 2x - 4m - 1 = 0$ مفروض است اولاً تحقیق کنید

که معادله فوق بازار جمع مقادیر m دارای دو ریشه حقیقی است ثانیاً مطلوبست تعیین مقادیر m که بازار آنها یکی از ریشه های بزرگتر از ۱ و دیگری کوچکتر از ۱ باشد ثالثاً تحقیق کنید که مابین این مقادیر یک مقدار m یافت میشود که بازار آن مجموع مربعین ریشه ها با ضافه مجموع ریشه ها مساوی ۱۱ باشد رابعاً تابع $y = 2 - 4m - 1$

مفروض است مقدار m را بطریقی تعیین کنید که تابع دارای ماکزیمومی مساوی $\frac{1}{2}$ بود و بسلاوه بازار $x=0$ مقدار تابع مثبت باشد همچنین مطلوبست رسم جدول منحنی تغییرات آن بازار این مقدار m

۱۳۳- قطر دایره قاعده مخروط مستدیر قائمی مساوی $2R$ می باشد مولد SA را مساوی x فرض میکنیم مطلوبست اولاً محاسبه نسبت حجم مخروط بجم کره محاط در آن ثانیاً تغییرات این نسبت وقتی x تغییر کند ثالثاً تعیین x بطریقی که نسبت فوق مساوی $\frac{1}{2}$ باشد

۱۳۴- تابع $y = \frac{-x^2 + 4x + 5}{2}$ مفروض است مطلوبست اولاً

رسم جدول و منحنی تغییرات آن ثانیاً در روی منحنی دو نقطه A' و A'' بعرض $\frac{1}{2}$ موجود است مطلوبست محاسبه طول آنها و سطح مثلث $OA'A''$ ثالثاً بازار h کو چکتر از مقداری که تعیین میشود دو نقطه H' و H'' در روی منحنی بعرض h یافت میشود

مطلوبست محاسبه مربع سطح مثلث $OA'H''$ بر حسب h رابعا رسم جدول منحنی تغییرات عبارت اخیر هرگاه h در حدود ممکنه تغییر کند

۱۳۵- معادله $(m-1)x^2 - c(m+1)x + cm + 5 = 0$ مفروض است

مطلوبست اولاً حدود مقادیر m برای آنکه معادله فوق دارای ریشه حقیقی باشد ثانیاً هرگاه m در حدود مقادیر فوق باشد محوری مانند ox و دو نقطه A و B را بطول $OA = x'$ و $OB = x''$ ریشه های معادله فوق فرض میکنیم مطلوبست طول oc نقطه مانند c در صورتیکه بدانیم $\frac{1}{oc} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB}$ می باشد و رسم

جدول و منحنی تغییرات آن هرگاه m در حدود مقادیر فوق تغییر کند

۱۳۶- تابع $y = \frac{a(x^2-1) - \pi(a^2-1)}{x^2+1}$ که در آن a مقدار ثابت مفروض است

مطلوب است اولاً مقادیر x که بازاء آنها y صفر میشود و همچنین تعیین وقت در

x که بازاء آنها y صفر میگردد و تحقیق آنکه این مقادیر بر حسب a منطبق

میباشند ثانیاً جدول و منحنی تغییرات تابع را هرگاه $a=2$ و x از ۰

تا ∞ تغییر کند رسم کنید ثالثاً در حالت کلی هرگاه $x = \tan u$ و

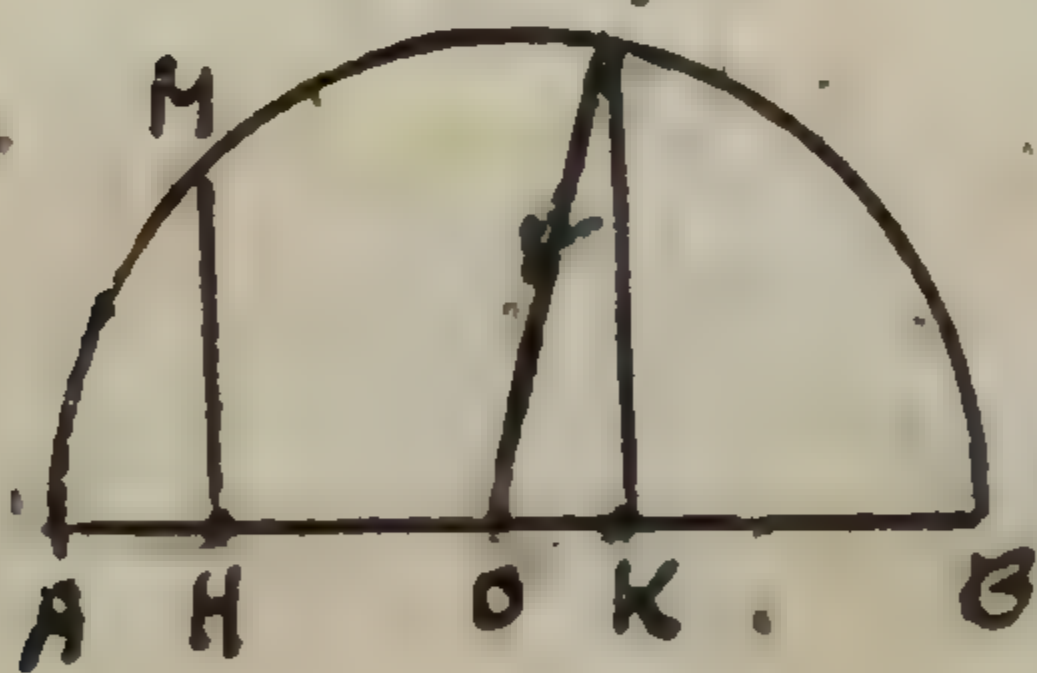
$a = \tan \alpha$ فرض شود تحقیق کنید که y را میتوان بعبارت قابل محاسبه

بوسیله لگاریتم تبدیل نمود

۱۳۷- نیمدایره بر کمره و بقطر $AB = 2R$ مفروض است در روی AB دو نقطه

H و K را اختیار نموده و فرض میکنیم

$AH = x$ و $BK = 2x$ باشد



عمودهای HM و PK را بر AB انواج

نموده و شکل را در حول AB دوران میدهد هم مطلوب است اولاً محاسبه V

حجم حادث از دوران سطح AHM و V حجم حادث از دوران سطح BOP

ثانیاً تعیین x بطریقی که نسبت $\frac{V_1}{V_2}$ مساوی مقدار معلوم m باشد

(بحث بنابر آنکه دو حجم فوق دارای قطع مشترکی نباشند) ثالثاً هرگاه V حجم

کره حادث از دوران نیمدایره باشد مطلوب است رسم جدول و منحنی تغییرات

$$y = \frac{v_1' x + v_1}{v_1''} \quad \text{هرگاه } x \text{ از } 0 \text{ تا } R \text{ تغییر کند}$$

$$138 - \text{معادله} \quad (1-t)x^2 + (3t-5)x + 4(2-t) = 0$$

مفروض است مطلوبت حدود t برای آنکه معادله دارای دو ریشه مثبت باشد

ثانیاً ریشه های معادله را اصطلاح قائمه یک مثلث قائم الزاویه فرض میکنیم مطلوبت

محاسبه وتر مثلث بر حسب t و رسم جدول و منحنی تغییرات آن هرگاه t در

حدود فوق تغییر کند ثالثاً مطلوبت محاسبه شعاع دایره محاطیه مثلث فوق و تغییرات

آن با شرایط فوق و همچنین محاسبه شعاع بر حسب وتر

$$139 - \text{معادله} \quad 1 = 0 \quad \frac{u}{uy-x} + \frac{1}{y-ux}$$

و x و y مختصات نقطه مانند M واقع در سطح دو محور می باشد مفروض است

مطلوبت اولاً مکان نقطه M برای آنکه ریشه های معادله فوق مساوی باشند

ثانیاً برای آنکه معادله دارای دو ریشه حقیقی باشد ثالثاً برای آنکه ریشه مثبت باشند

رابعاً هرگاه $x=2$ و $y=1$ باشد تغییرات طرف اول معادله فوق را

بما بر آنکه u از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند معلوم نموده منحنی آن را رسم کنید

$$140 - \text{تابع} \quad y = x + \frac{4}{x-1} \quad \text{مفروض است اولاً جدول و منحنی } y \text{ نمایش}$$

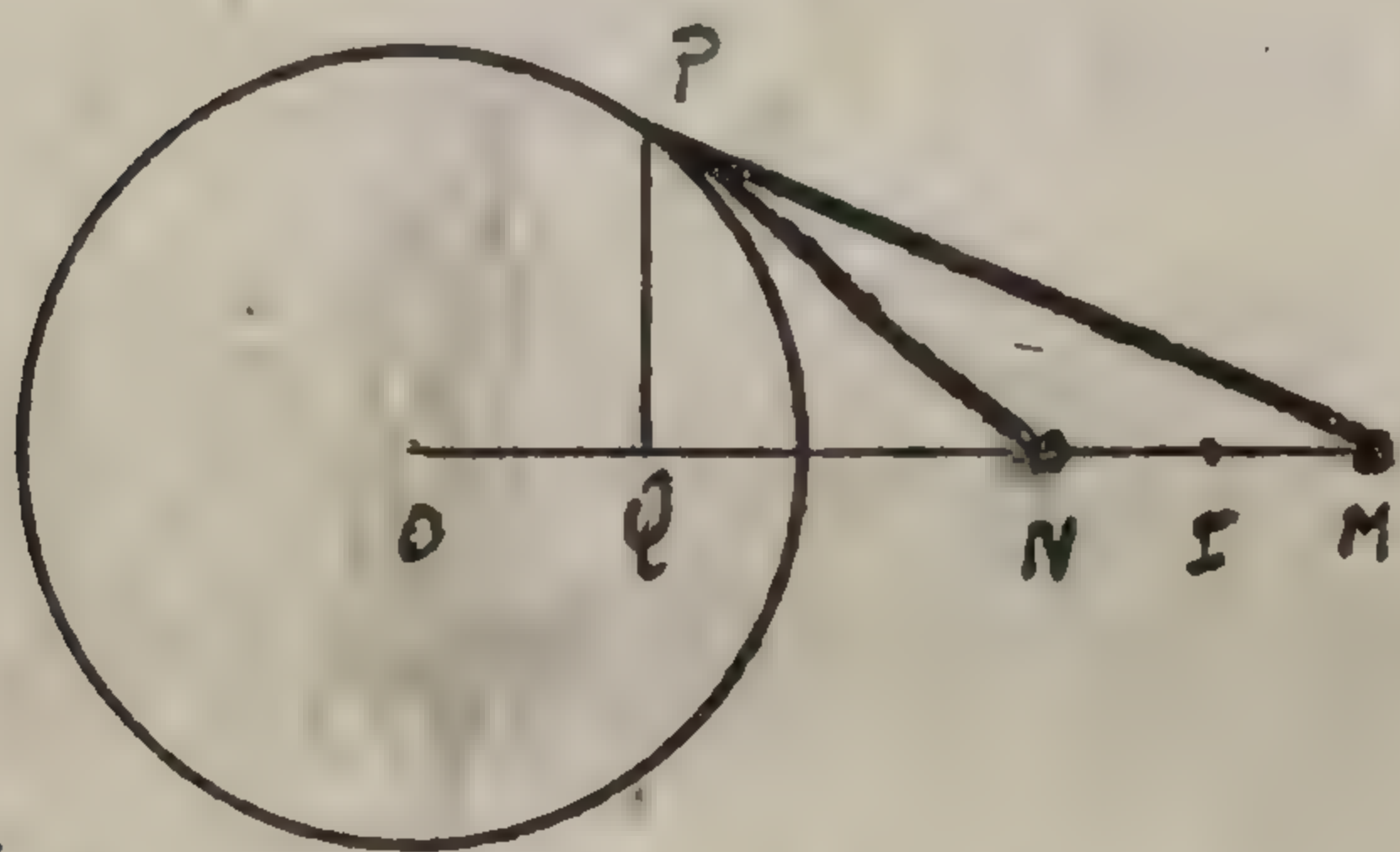
تغییرات آن را رسم کنید ثانیاً منحنی را بواسطه خط $y=5$ قطع میکنیم

مطلوبت تعیین حدود x برای آنکه خط منحنی را قطع کند ثالثاً هرگاه نقاط A و B

محل تقاطع خط با منحنی باشد مطلوبت محاسبه مختصات نقطه M وسط AB

و معادله در رسم مکان آن هرگاه x تغییر کند معلوم کنید و دو نقطه از منحنی
اول را که بر روی مکان فوق واقع میگردند را بجا منحنی تابع $y = \frac{x^2 + 2x - 5}{2}$ را
رسم نموده و تحقیق کنید که این منحنی بر نقاط ماکزیموم و مینیموم منحنی e مردریناید
و معلوم نمائید که آیا دو منحنی نقطه مشترک دیگری نیز خواهد داشت یا خیر

۱۴۱- دایره o شعاع R و نقطه I در سطح آن بقاصده $OI = 3R$ مفروض
است در روی خط OI و در یکطرف مرکز o دو نقطه M و N را اختیار



میکنیم و فرض میکنیم نقطه I وسط MN و

$OM \times ON = R^2$ باشد حال اگر

$OM = y'$ و $ON = y''$ باشد مطلوب است

اولاً تشکیل معادله درجه دومی که ریشه های آن y' و y'' باشد ثانیاً در روی محیط

دایره نقطه مانند P فرض نموده آنرا بر OI در نقطه Q تصویر میکنیم و فرض میکنیم $OQ = x$

باشد مطلوب است محاسبه x بطریقی که $\overline{PM} + \overline{PN} = 2R$ باشد (بحث)

ثالثاً مطلوب است محاسبه محیط مثلث PMN بر حسب l و x و تغییرات

آن هرگاه x در حدود ممکنه تغییر کند

۱۴۲- مطلوب است اولاً رسم خطوط $x + 2y - 5 = 0$ و $4x - y - 10 = 0$

ثبت بدو محور x و y و محاسبه مختصات A نقطه تقاطع آنها و همچنین

محاسبه طول OA ثانیاً از نقطه A خطی با ضریب زاویه منفی m - رسم میکنیم

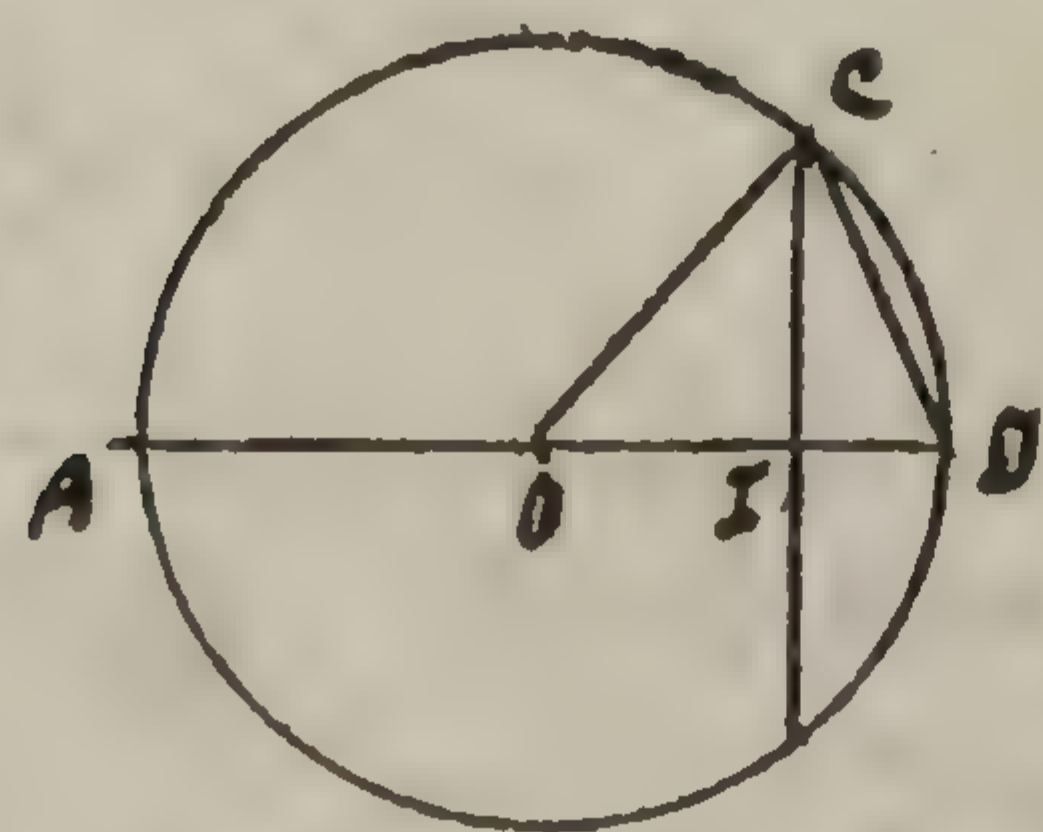
و فرض کنیم نقطه تقاطع آن با محور $P x'x$ و یا محور $Q y'y$ باشد
 مطلوبست محاسبه طولهای OP و OQ و تغییرات سطح مثلث OPQ هرگاه
 m تغییر کند و ترسیم خط P_1Q_1 نظیر موقعی که سطح فوق مینیمم باشد ثالثاً مطلوبست
 محاسبه h^2 مجذور ارتفاع وارد از O در مثلث OPQ و تغییرات آن هرگاه
 m تغییر کند و محاسبه h^2 ماکزیوم

۱۴۳- دو تابع $y = ax^2 + bx + c$ و $y' = a'x^2 + b'x + c'$ مفروضند
 اولاً رابطه باین ضرایب فوق تعیین کنید بطریقی که دو منحنی یکدیگر را برآویز قاعده قطع نمایند
 ثانیاً فرض کند $a' = -1$ و $b' = 0$ و $c' = \frac{3}{4}$ باشد در اینصورت a
 و b و c را نیز تعیین نموده دو منحنی را در روی یک محور رسم کنید ثالثاً در سطح دو محور
 فوق نقطه تعیین کنید که چون از آن نقاط تقاطع دو منحنی وصل کنیم این خطوط بر تعیب با
 جهت مثبت محور $x'x$ زوایای 45° و 135° تشکیل دهد زابعا هرگاه فرض کنیم محور $x'x$
 بر نقطه تقاطع دو منحنی مرور نموده و نسبت محور $y'y$ قائم باشد صورت جدید معادلات دو
 منحنی را معلوم کنید

۱۴۴- مطلوبست اولاً رسم جدول و منحنی تغییرات تابع $y = \frac{x}{x^2 - x + m}$
 و تحقیق حالات مختلفه آن بر حسب مقادیر m ثانیاً خط Δ موازی محور $x'x$ منحنی را
 منتهی در دو نقطه M' و M'' قطع مینماید هرگاه عرض نقطه P محل تقاطع خط با محور $y'y$
 در دست باشد مطلوبست طول نقطه M وسط $M'M''$ و همچنین طول نقطه Q در بوج

توافقی P نسبت به H' و H'' معادله در رسم مکان نقاط H و Q برگاه نقطه P
محور Y را طی نماید

۱۴۵- در دایره مفروضی قطر AD بر وتر CI عمود می باشد فرض میکنیم $CD=x$



و شعاع دایره مساوی y باشد

مطلوبت اولاً محاسبه سطح حادث از

دوران خط منحنی oCD در حول OD

ثانیاً مطلوبت حجم محدوده سطح فوق و همچنین رابطه مابین x و y بطریقی که این سطح
مساوی πa^2 باشد و از نیز مطلوبت حدود تغییرات x ثانیاً با وجود شرط
فوق فرض میکنیم $\frac{x}{a} = t$ باشد در این صورت جدول و منحنی تغییرات t
مجدد در حجم فوق را برگاه t تغییر کند رسم نماید

۱۴۶- تابع $y = \frac{3x^2 - 2}{x^2 + 2x + 1}$ مفروض است اولاً مطلوبت مقادیر

a که بازار آنها تابع همیشه در یک جهت تغییر کند ثانیاً تعیین مقادیر a که بازار آنها y دارای
یک ماکزیموم و یک مینیموم باشد و تحقیق کنید که شرط لازم و کافی برای آنکه تابع بازار
مقداری مانند x ماکزیموم و بازار y مینیموم باشد آنست که $x_1 x_2 = \frac{2}{3}$ باشد
همچنین مقدار a را تعیین کنید برای آنکه $x_1 = \frac{1}{2}$ و $x_2 = 2$ باشد و جدول
و منحنی تغییرات تابع را بازار این مقدار a رسم کنید ثانیاً مطلوبت تشکیل معادله درجه
دومی که ریشه های آن مقادیر M و m ماکزیموم و مینیموم تابع باشد را بقا مطلوبت

تعیین رابطه مستقی از α مابین مقادیر m و M

۱۴۷ - دایره بقطر $AB = 2R$ و نقطه M در روی آن بقاصد $AM = x$ مفروض است و در MN را بر AB عمود نموده MB و NB را وصل میکنیم مطلوب است

اولاً محاسبه شعاع دایره محیطه

مثلث MNB بر حسب R و x

ثانیاً هرگاه نقطه C مرکز این دایره باشد

مطلوب است محاسبه MC بر حسب R

و x ثانیاً رسم جدول و منحنی تغییرات

$y = \frac{MC}{R}$ هرگاه x تغییر کند رابعا هرگاه فرض کنیم $R=1$ باشد MC را تا یک یا کمتر تقریب حساب کنید

۱۴۸ - مطلوب است اولاً تشکیل معادله درجه دومی که ریشه های آن x' و x'' در روابط

$$4x'x'' - 5(x' + x'') + 4 = 0 \quad \text{ذیل صدق نمایند} :$$

$$(x' - 1)(x'' - 1) = \frac{1}{1 - \alpha}$$

ثانیاً مطلوب است تعیین وضعیت ریشه های معادله فوق نسبت به -1 و $+1$ بر حسب

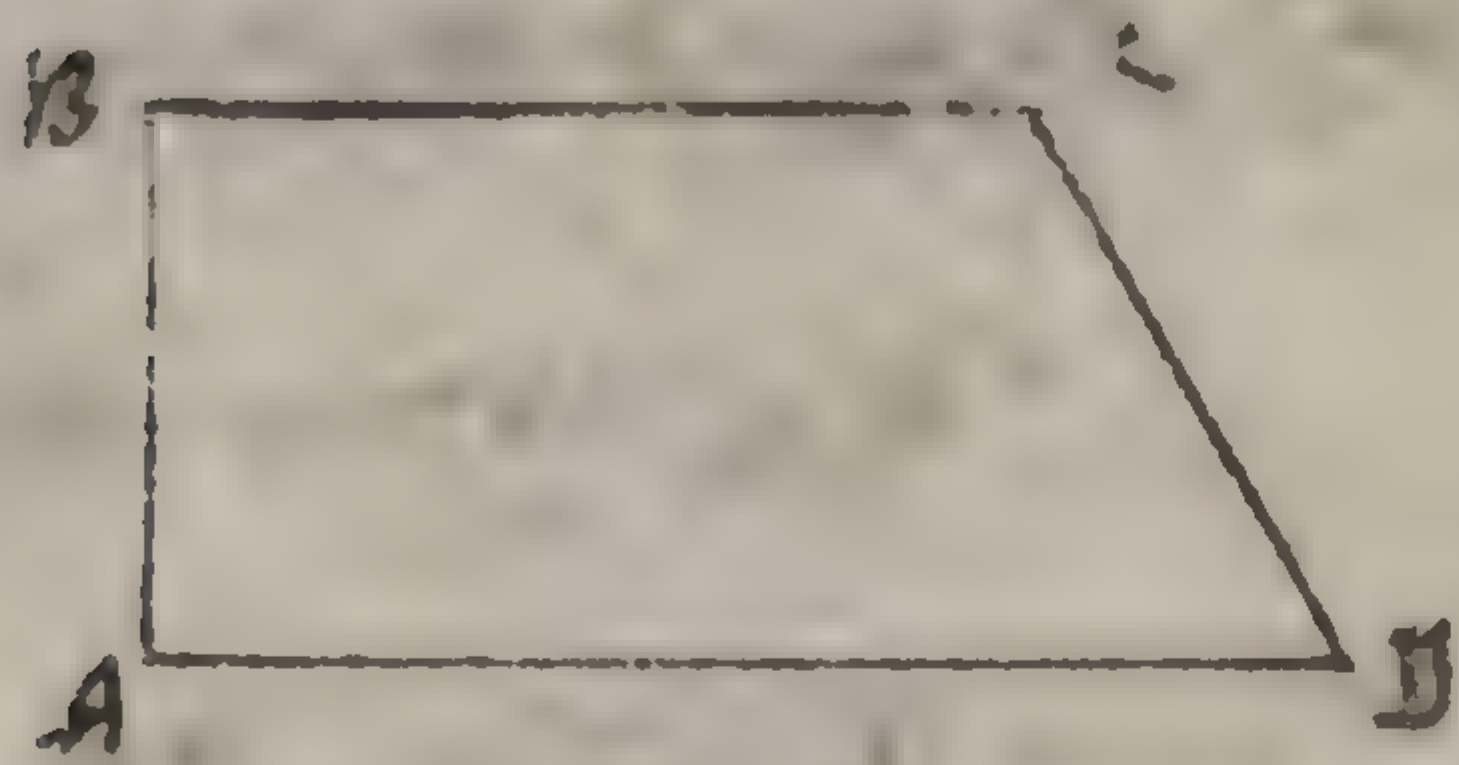
مقادیر مختلفه α ثالثاً جدول و منحنی تغییرات تابع $y = \frac{x^4 - 4x + 4}{x^4 - 1}$

و تحقیق نتایج ثانیاً از روی منحنی رابعا فرض میکنیم خطی موازی محور $x'x''$ منحنی را در

دو نقطه A و B قطع نماید مطلوب است رابطه مابین مختصات نقطه C وسط AB

و معادله در رسم مکان نقطه c هرگاه خط موازات خود حرکت نماید

۱۲۹ - دوزنقه $ABCD$ که در آن زوایای A و B قائمه است مفروض است



فرض میکنیم $AD = a$ ثابت و سطح

دوزنقه نیز ثابت و مساوی a باشد

مطلوبت عبارت سطح جانبی مخروط

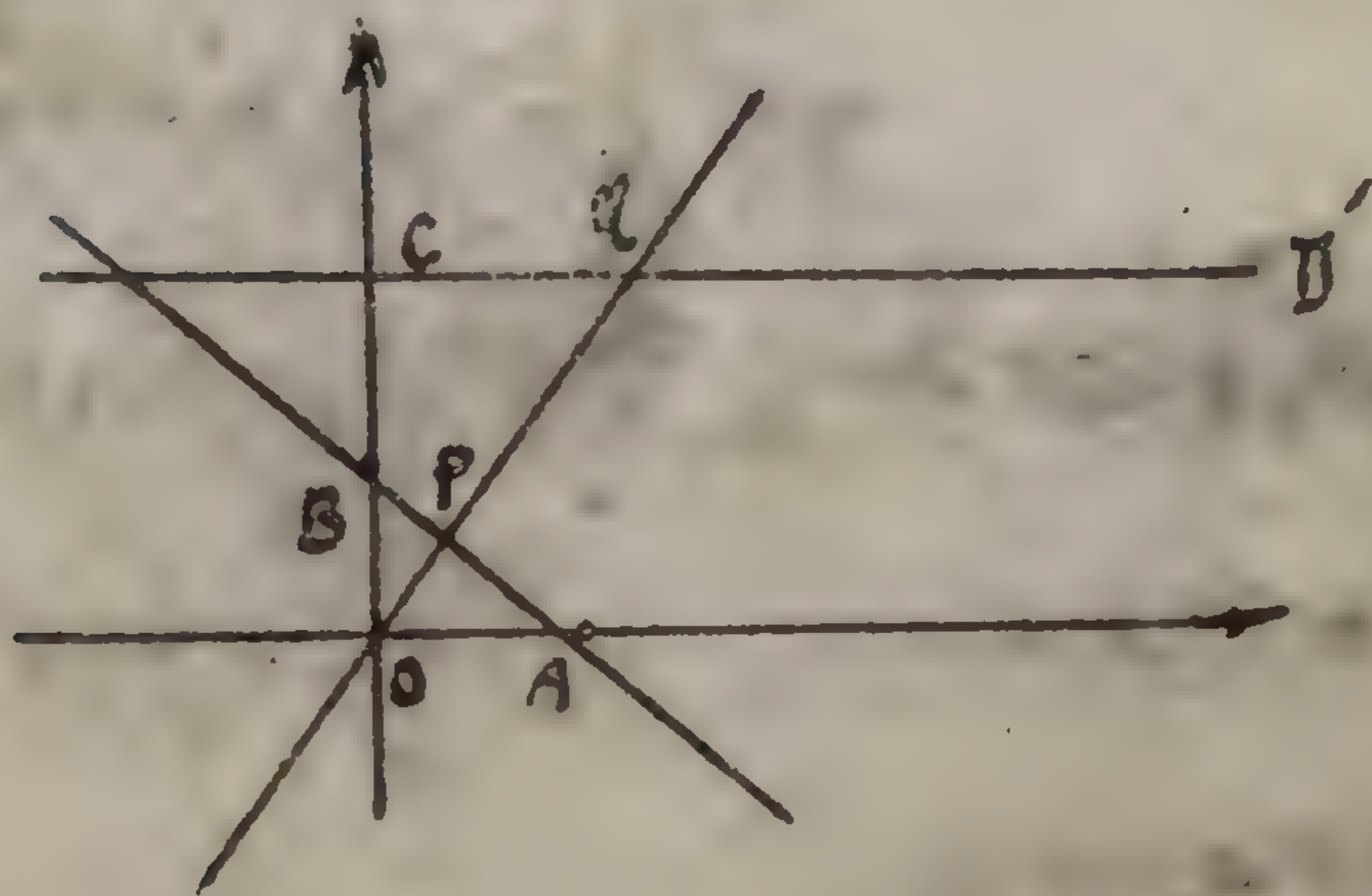
ناقص حادث از دوران دوزنقه در حول AB بر حسب a و طول متغیر $AB = x$

و تغییرات مربع آن هرگاه x تغییر کند

۱۳۰ - دو محور قائم ox و oy مفروض است خط AB محور ox را در نقطه A و

محور oy را در نقطه B قطع میکند بطریقی که $OA = OB = 1$ میباشد خط

دیگر CD موازی محور ox محور



oy را در نقطه C قطع میکند

بطریقی که $OC = 2$ میباشد

حال از نقطه O خطی با ضریب

زاویه m رسم میکنیم و فرض میکنیم که خط CD را در نقطه P و خط AB را در نقطه Q

قطع کند مطلوبت اولاً محاسبه OP و OQ بر حسب m ثانیاً رسم جدول

مختی تغییرات $y = OP \times OQ$ هرگاه m از 0 تا 90 تغییر کند ثالثاً

در حالتی که فرض کنیم $OP \times OQ = a$ باشد مقدار a را تعیین کنید بطریقی

که دو خط PQ عمود بر یکدیگر موجود باشد بطریقی که مابین قطعات OP و OQ رابطه اخیر برقرار باشد

۱۵۱- اولاً معادله $(x-1)^2 + 2x^2 = 9$ را حل کنید ثانیاً مقدار m را

تعیین کنید بطریقی که معادله $(x-1)^2 + 2x^2 = m$ لا اقل دارا می یک جواب

باشد و در این صورت علامت جوابها را تعیین کنید ثالثاً دو نقطه O و A را در روی

محور اختیار نموده فرض میکنیم OA مساوی واحد و جهت از O به A جهت مثبت

باشد حال اگر نقطه M نقطه از محور بوده و $OM = x$ باشد مطلوبست موضع نقطه

M برای آنکه $\overline{MA'} + 2\overline{OM}^2 \leq 9 - \overline{OA'}^2$ باشد رابطه مطلوبست تغییرات

$y = \overline{MA'} + 2\overline{OM}^2$ برگاه x از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند و وضعیت

نقطه M را تعیین کنید بطریقی که y کوچکترین مقدار ممکنه را دارا گردد

۱۵۲- دو نقطه A و A' با فاصله $AA' = 2a$ مفروض است بمرکز O وسط AA' نمدایره



بشعاع R رسم نموده از A و A' دو خط بر آن

ماس میکنیم و شکل را در حول AA' دوران میدیم

مطلوبست اولاً محاسبه سطح منطقه حادث از دوران قوس PP' و حجم حادث از دوران

قطاع $AP'P$ بر حسب R و a ثانیاً سطح حادث از دوران AP و حجم حادث از دوران

شکل منحنی $AA'P'PA$ ثالثاً محاسبه R بطریقی که این حجم m برابر حجم کره بشعاع R باشد

(بحث) همچنین مطلوبست محاسبه نسبت $\frac{R}{a}$ در حالتیکه $m=1$ و $m=\frac{2}{3}$ باشد

۱۵۴- معادله درجه دوم $x^2 - 2(x+y) + 4 - y = 0$ مفروض است

مطلوبت: ۱- بحث در وجود و علامت ریشه های آن بر حسب مقادیر y - تابع

را فرض میکنیم مطلوبت حدود مقادیر m برای آنکه به

همیشه در یک جهت تغییر کند یا آنکه دارای یک ماکزیموم و یک مینیموم باشد ۲- تحقیق کنید

که کلیه منحنیاتی که بازار مقادیر مختلفه m رسم میشوند همواره بر نقطه ثابتی مرور مینمایند و مختصات

این نقطه را حساب کنید ۳- در حالتی که تابع دارای یک ماکزیموم و یک مینیموم باشد

معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه های آن متساویر ماکزیموم و مینیموم تابع باشد و تحقیق

کنید که مابین این مقادیر رابطه موجود است که بستگی به m ندارد ۵- مقدار m را

حساب کند بطریقی که منحنی بر محور x مماس گردد ۶- منحنی تابع فوق را بازار

۴- رسم کنید ۷- از روی منحنی فوق بحث سوال اول را نتیجه بگیرید

۸- ثابت کنید که منحنی فوق نسبت به نقطه تقاطع دو خط مجانب آن قرینه است ۹-

تحقیق کنید که هر خط بصورت $y = x + a$ منحنی را در یک نقطه قطع میکند و تحقیق کنید

حالت خاصی را که $a = -1$ باشد ۱۰- ثابت کنید که از مبدأ O میتوان دو

خط بر منحنی مماس نمود در اینصورت مطلوبت محاسبه θ زاویه حادثه مابین دو

مماس

مشق خطوط مثلثاتی

۸۴ - قضیه - در دایره مثلثاتی هر قوس که از حیث مقدار مطلق

کوچکتر از $\frac{\pi}{2}$ باشد محصور است بین منحنی و $\frac{\pi}{2}$ آن

قوس مثبت $\widehat{AM} = x$ را فرض نمود

آنرا بر OA تصویر میکنیم بنا بر تعریف

$PM = \sin x$ و $AT = \tan x$ میباشد

حال دو مثلث OAM و OAT

و قطاع OAM نامساویهای ذیل را

میتوان نوشت :

OAT سطح مثلث < OAM سطح قطاع < OAM سطح مثلث

$$\frac{1}{2} OA \times PM < \frac{1}{2} OA \times \widehat{AM} < \frac{1}{2} OA \times AT$$

و یا

$$\sin x < x < \tan x \quad \text{و از آنجا} \quad PM < \widehat{AM} < AT$$

و یا

در صورتیکه قوس منفی فرض شود نامساویهای فوق در جهت مخالف برقرار

بوده و بنا بر این حکم همیشه محقق است

نتیجه - نسبت قوس به \sin آن میل میکند نسبت واحد به \sin قوس

میل کند سمت صفر

اولاً هرگاه x مثبت باشد برونی قضیه فوق حاصل میشود $tx < x < ex$
 و یا $\frac{1}{ex} < \frac{x}{e} < 1$ حال اگر x میل کند سمت صفر یکطرفه نامساویهای
 فوق ثابت و مساوی از طرف دیگر یعنی $\frac{1}{ex}$ نیز میل میکند سمت $\frac{1}{e}$ بطوریکه
 حد نسبت $\frac{x}{e}$ که همواره محصور مابین این دو مقدار است مساوی خواهد بود
 ثانیاً هرگاه x منفی باشد حاصل میشود $tx < x < ex$

ولذا $1 > \frac{x}{e} > \frac{1}{ex}$

در نامساویهای فوق نیز مانند حالت قبل هرگاه x میل کند سمت صفر نسبت
 $\frac{x}{e}$ میل میکند سمت واحد

بنابراین در همه حال میتوان نوشت $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x}{e} \right| = 1$

واضح است که هرگاه حد نسبت فوق مساوی $\frac{1}{e}$ باشد حد نسبت $\frac{ex}{e}$ نیز
 هرگاه x میل کند سمت صفر مساوی خواهد بود بطوریکه میتوان نوشت :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{ex}{e} \right| = 1$$

محاسبه مشتق خطوط مثلثاتی

۹۰- فرض میکنیم y تابعی از x باشد که مشتق آن را بحسب x به y' مینویسیم

حال اگر فرض کنیم $y = \sin u$ یا $y = \cos u$ باشد مقصود محاسبه مشتق توابع فوق میباشد

۹۱- مشتق $y = \sin u$ - مشتق $y = \cos u$ عبارت از

$$y' = \cos u \times u'_x$$

زیرا اگر بنا بر تعریف مشتق عمل کنیم مرتباً حاصل میشود :

$$x_1 = x$$

$$y_1 = \sin u$$

$$x_2 = x + \Delta x$$

$$y_2 = \sin(u + \Delta u)$$

$$x_2 - x_1 = \Delta x$$

$$y_2 - y_1 = \Delta y = \sin(u + \Delta u) - \sin u =$$

$$= \sin \frac{\Delta u}{r} \cos(u + \frac{\Delta u}{r})$$

پس از آنکه

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta u}{r} \cdot \cos(u + \frac{\Delta u}{r})}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta u}{r}}{\frac{\Delta u}{r}} \times \cos(u + \frac{\Delta u}{r}) \times \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right| = y' = \cos u \times u'_x$$

و در اینجا

حالت مخصوص - مشتق $y = \sin x$ بنا بر دستور فوق عبارت

$$y' = \cos x \quad \text{از}$$

مثال - مشتق $y = \cos x$ عبارت میگردد از $y' = -\sin x$

مشتق $y = \tan x$ عبارت از $y' = \sec^2 x$

$$y' = \ln u \times u'$$

(۱۸۱)

$$y = \ln u$$

۱۲- مشتق $y = \ln u$ - مشتق $y = \ln u$ عبارتست از

$$y' = -\ln u \times u'$$

زیرا چون بر طبق تعریف مشتق عمل کنیم مرتباً میتوان نوشت :

$\begin{array}{l} x_1 = x \\ x_2 = x + \Delta x \\ \hline x_2 - x_1 = \Delta x \end{array}$	$\begin{array}{l} y_1 = \ln u \\ y_2 = \ln(u + \Delta u) \\ \hline y_2 - y_1 = \Delta y = \ln(u + \Delta u) - \ln u = \\ = -\ln \frac{\Delta u}{u} \ln(u + \frac{\Delta u}{u}) \end{array}$
---	---

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\ln \frac{\Delta u}{u} \ln(u + \frac{\Delta u}{u})}{\Delta x} = -\frac{\ln \frac{\Delta u}{u}}{\frac{\Delta u}{u}} \ln(u + \frac{\Delta u}{u}) \times \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right| = y' = -\ln u \times u'$$

حالت مخصوص - مشتق $y = \ln x$ بر وفق دستور فوق عبارتست

$$y' = -\ln x \quad \text{از}$$

۱۳- مشتق $y = \tan u$ و $y = \cot u$ و $y = \sec u$ و $y = \csc u$

چون بجای مقادیر فوق نسبت قرار داده و بر وفق آنچه میدانیم مشتق حساب

کنیم حاصل میشود :

$$y' = \frac{1}{\cos^2 u} \times u'$$

$$y = \tan u \quad \text{مشتق}$$

$$y' = \frac{-1}{\sec u} \times u'_x$$

$$y' = \frac{\sec u}{\sec u} \times u'_x$$

$$y' = \frac{-\sec u}{\sec u} \times u'_x$$

$$y = \csc u \quad \text{مشتق}$$

$$y = \sec u \quad \text{مشتق}$$

$$y = \operatorname{cosec} u \quad \text{مشتق}$$

مسائل

۱۵۴- مشتق توابع ذیل را بطور مستقیم بآزاد $x = \frac{\pi}{4}$ و $x = \frac{3\pi}{4}$ و $x = -\pi$

و $x = \frac{\pi}{2}$ حساب کنید

$$y = \ln x$$

$$y = \cos x$$

$$y = \tan x$$

$$y = \ln^2 x$$

$$y = -\cos x$$

$$y = \frac{1}{x} \tan x$$

$$y = 1 + \ln x$$

$$y = 1 - \cos x$$

$$y = 1 + \tan \frac{x}{2}$$

$$y = \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x}$$

$$y = \frac{\ln x + \cos x}{\ln x - \cos x}$$

$$y = \frac{\tan x}{1 + \ln x}$$

۱۵۵- مشتق توابع ذیل را حساب کنید :

$$y = \ln^2 x + \ln x + \cos x$$

$$y = \ln^3 x - \ln^2 x + \ln x$$

$$y = \frac{1}{x} \ln \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}$$

$$y = \cos x - \sin x - x$$

$$y = \cos^2 x - \ln^2 x$$

$$y = \ln^2 \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + \cos x$$

$$y = \frac{\ln x}{1 + \ln x}$$

$$y = \frac{\ln^2 x}{1 + \cos x}$$

$$y = \frac{\cos x}{1 - \cos x}$$

$$y = \frac{\cos^2 x}{1 + \ln^2 x}$$

-۱۵۶

(۱۸۳)

$$y = \frac{\lambda x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

$$y = \frac{(1 + \lambda x)^y}{\lambda x (1 - \lambda x)}$$

-۱۵۲

$$y = \operatorname{tg} x + \lambda c x$$

$$y = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}$$

$$y = \frac{\lambda^2 x + r \lambda \omega x + \lambda \nu x}{\lambda^2 x + \lambda \omega x}$$

$$y = \frac{a \lambda x + b c x + c}{a' \lambda x + b' c x + c'}$$

-۱۵۸

$$y = \sqrt{\frac{1 + \lambda x}{1 - \lambda x}}$$

$$y = \sqrt{\frac{x \lambda x}{1 - c x}}$$

$$y = \sqrt{1 + \lambda x} - \lambda x c x$$

$$y = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}}$$

۱۵۹- مقدار حقیقی عبارات ذیل را حساب کنید :

$$y = \frac{1 - c x}{x^2}$$

بازاء

$$x = 0$$

$$y = \frac{\lambda \frac{\pi x}{r}}{x}$$

بازاء

$$x = 0$$

$$y = \frac{c x}{1 - \sqrt{1 + \lambda x}}$$

بازاء

$$x = \frac{\pi}{r}$$

$$y = \frac{\lambda^2 x - \lambda^2 a}{x^2 - a^2}$$

بازاء

$$x = a$$

-۱۵۰

$$y = \frac{\operatorname{tg} x - \lambda x}{\lambda x (c x - c x)}$$

بازاء

$$x = 0$$

$$y = \frac{\lambda (x - \frac{\pi}{r})}{1 - r c x}$$

بازاء

$$x = \frac{\pi}{r}$$

$$y = \frac{x \operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} - 1}$$

بازاء

$$x = 0$$

$$y = \frac{c x}{\pi - r x}$$

بازاء

$$x = \frac{\pi}{r}$$

(۱۸۴)

تغییرات توابع مثلثاتی

۹۴- برای رسم جدول و منحنی تغییرات توابع مثلثاتی همان دستور توابع حری باید بکار برد منتهی چون توابع مثلثاتی متناوب میباشند کافیست که متغیر x را در حدود معینی (دوره تناوب) تغییر داد و اینک برای نمونه تغییرات بعضی

توابع را مورد مطالعه قرار میدسیم

مسئله ۱- مطلوبست رسم جدول و منحنی تغییرات تابع $y = 2 \sin^2 x - 2 \sin x + 3$

برگاه x از ۰ تا 2π تغییر کند

۱- تابع فوق بازار جمع مقادیر x اتصالی است

۲- مشتق آن عبارتست از $y' = 4 \sin x \cos x - 2 \cos x = 2 \cos x (2 \sin x - 1)$

که بازار جوابهای $\cos x = 0$ و یا $2 \sin x - 1 = 0$ و جوابهای $\sin x = \frac{1}{2}$

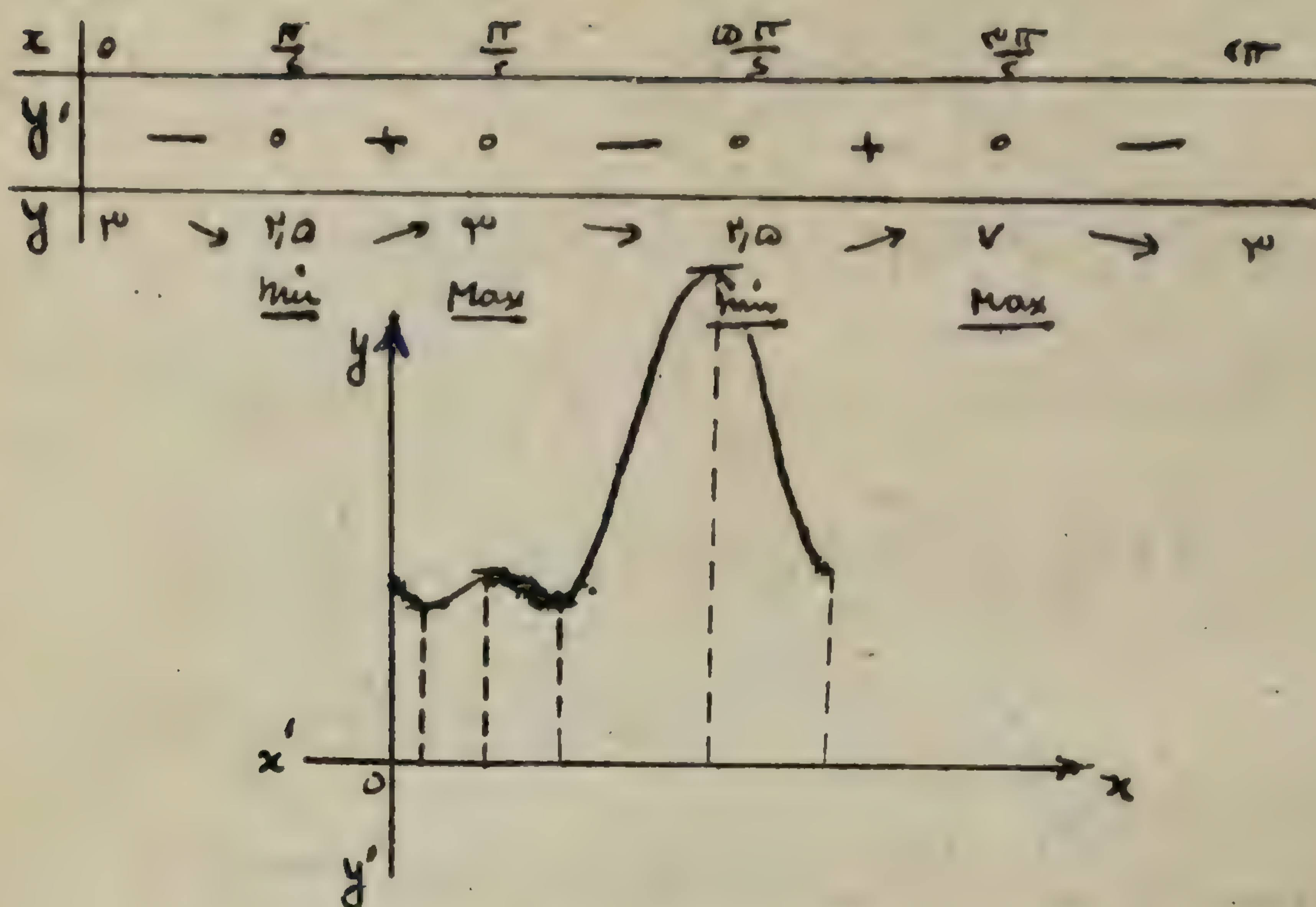
و یا $x = \frac{\pi}{6}$ و $x = \frac{5\pi}{6}$ صفر میگردد

۳- بازار $x=0$ و $x=2\pi$ حاصل میشود $y=3$

۴- چون y را سادهی صفر قرار دهیم حاصل میشود $2 \sin^2 x - 2 \sin x + 3 = 0$

که دارای جواب نیست بنابراین منحنی محور x را قطع نمیکند

جدول و منحنی تغییرات تابع بصورت ذیل خواهد بود :



مسئله ۲ - مطلوب است رسم جدول و منحنی تغییرات تابع $y = 0.5 \cos x + 0.5 \sin x$ برگاه x از 0 تا 2π تغییر کند

۱- تابع فوق بازار جمع مقادیر x اتصالی است

۲- مشتق آن عبارتست از:

$$y' = -0.5 \sin x + 0.5 \cos x = -0.5(\sin x - \cos x) = -0.5 \sin(x - \frac{\pi}{4})$$

که بازار جوابهای $0.5 \cos x = 0$ و $0.5 \sin x = 0$ صفر میگیرد و از معادله

$$0.5 \cos x = 0 \quad \text{حاصل میشود} \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{و از اینجا} \quad x = k\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

که جوابهای مخصوصاً باین صفر و π در آن عبارتست از $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ و از معادله

$$0.5 \sin x = 0 \quad \text{حاصل میشود} \quad x = k\pi \quad \text{و از اینجا} \quad x = \frac{k\pi}{1}$$

که جوابهای محصور ما بین صفر و π در آن عبارتست از 0 و $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ و π

۳- بازاء $x=0$ حاصل میشود $y=6$ و بازاء $x=\pi$ حاصل میشود $y=-6$

۴- چون y را مساوی صفر فرض کنیم حاصل میشود $C_3 \omega x + \omega C_1 x = 0$

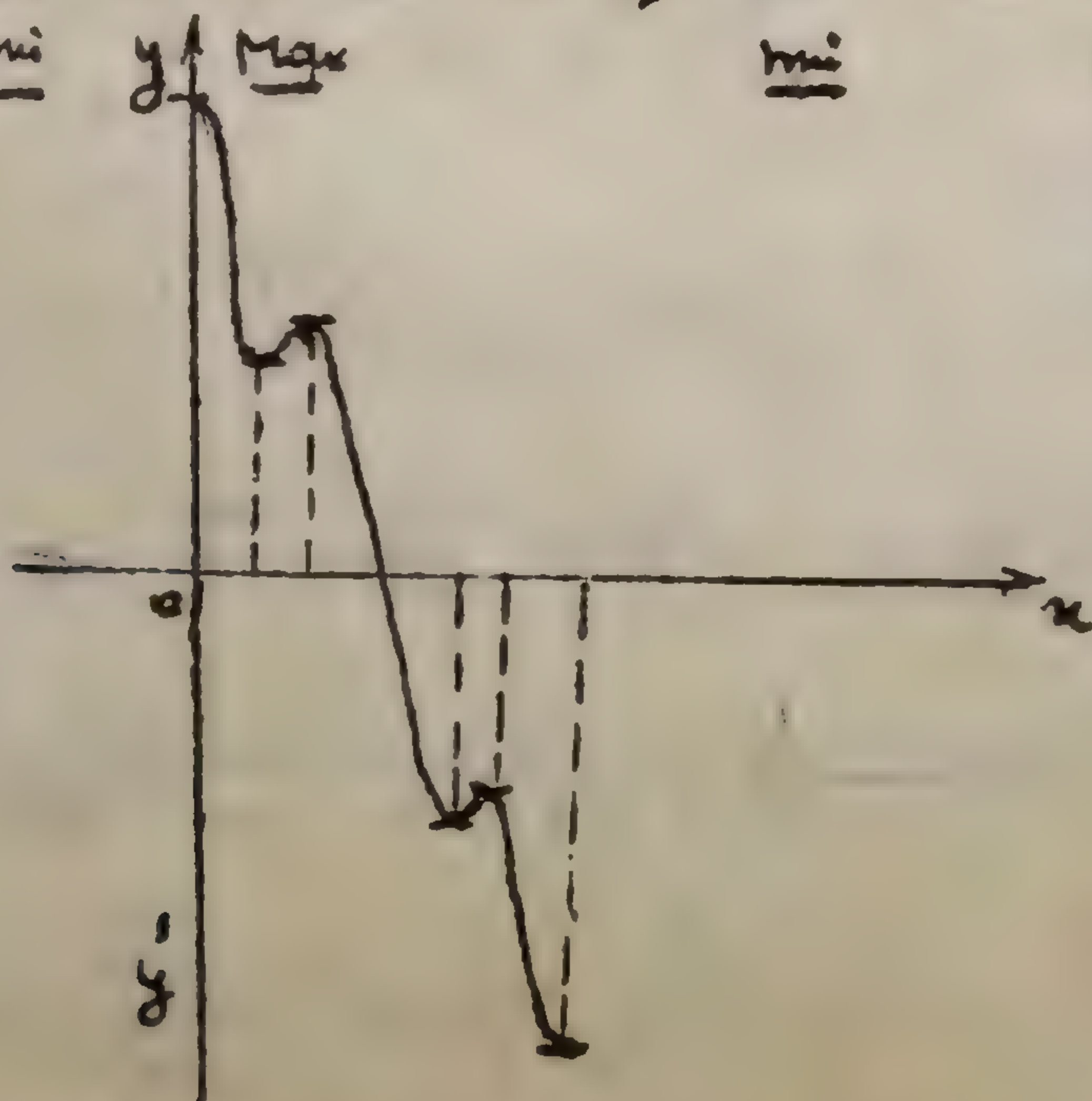
$$14 C_3 \omega x - 20 C_1 \omega x + 10 C_2 \omega x = 0 \quad \text{و یا}$$

$$2 C_1 x (14 C_3 x - 10 C_2 x + \omega) = 0 \quad \text{و یا}$$

که فقط بازاء جواب $C_1 x = 0$ و یا $x = \frac{\pi}{2}$ صفر میگردد

جدول و منحنی تغییرات آن بصورت ذیل میباشد

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	π
y'	0	-	0	+	0	-	0	+	0
y	6	$2\sqrt{2}$	2	0	-2	$-2\sqrt{2}$	-6		
	<u>Max</u>	<u>min</u>	<u>Max</u>		<u>min</u>	<u>Max</u>	<u>min</u>		



مسئله ۳- جدول و منحنی تغییرات تابع $y = \frac{C_3 x}{1 + C_1 x}$ برگاه $x=0$

از ۰ تا 2π تغییر کند رسم نماید

۱- ابتدا تابع فوق را بساده ترین صورت تبدیل میکنیم یعنی بجای C_{2x} و C_{4x} مقدار آنها بر حسب C_x قرار داده آنرا خلاصه میکنیم تا حاصل شود:

$$y = \frac{4C_x^2 - 3}{2C_x}$$

۲- تابع فوق بازار جمع مقادیر x اتصال است مگر بازار جوابها $C_x = 0$ و یا

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ و } x = \frac{3\pi}{2}$$

$$3- \text{ مشتق تابع عبارتست از } y' = \frac{-2x(4C_x' + 3)}{2C_x^2}$$

که بازار جوابهای $x = 0$ و یا $x = \pi$ و $x = 2\pi$ صفر شده و تغییر

علامت میدهد

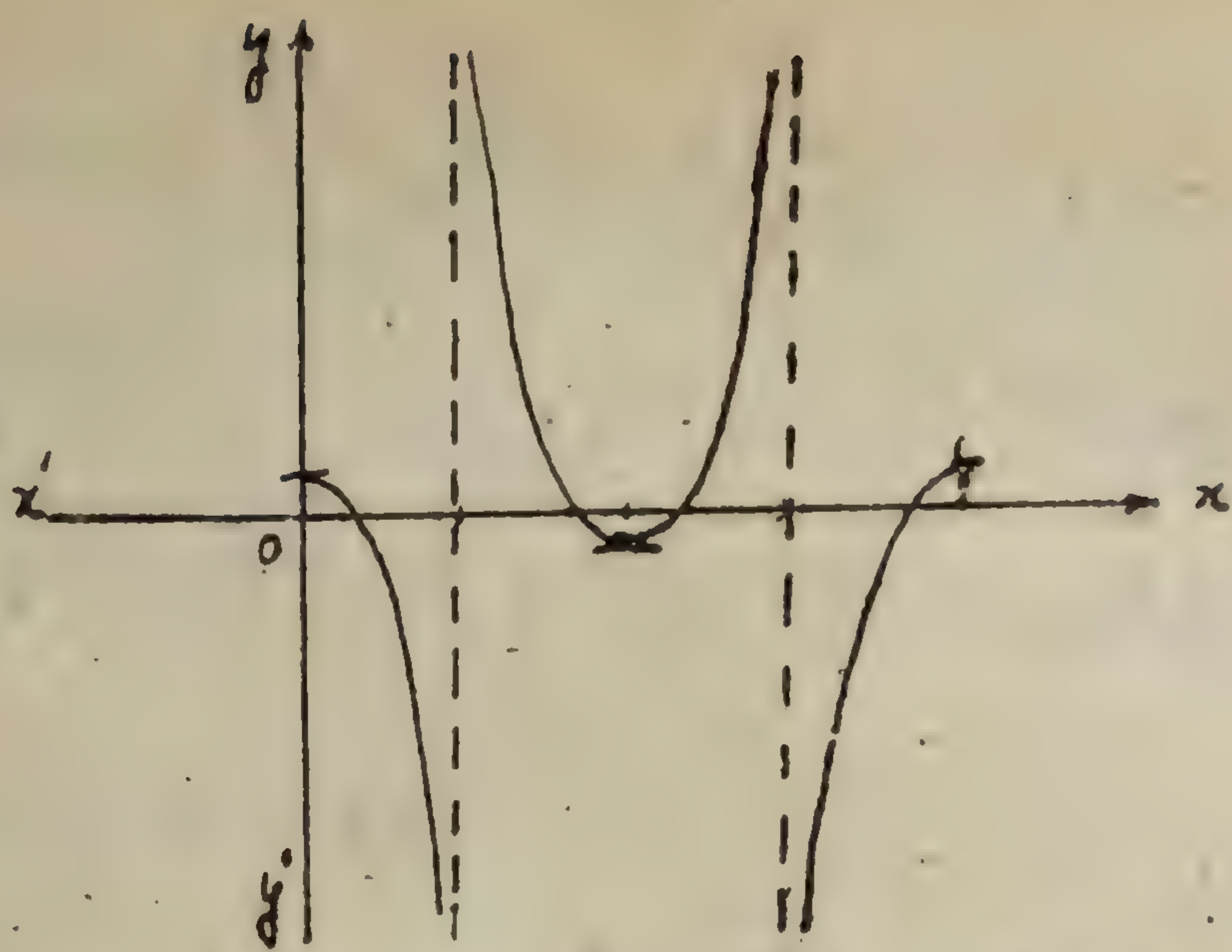
۴- بازار $x = 0$ و $x = 2\pi$ حاصل میشود $y = \frac{1}{2}$

۵- بازار $y = 0$ حاصل میشود $4C_x' - 3 = 0$ یا $C_x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

و از آنجا $x = \frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{3}$

جدول و منحنی تغییرات بصورت ذیل میباشد

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	π	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{3}$	2π
y'	0	—	—	—	0	—	+	—	0
y	$\frac{1}{2}$	\rightarrow	\rightarrow	$+\infty$	\rightarrow	\rightarrow	$+\infty$	\rightarrow	$\frac{1}{2}$
	<u>Max</u>				<u>min</u>				<u>Max</u>



مسئله ۴ - مطلوبست تغییرات تابع $y = x + 2 \cos x - 2$

۱- تابع فوق بازاء جمع مقادیر x اتصالی است

۲- مشتق تابع عبارتست از $y' = 1 - 2 \sin x$ که بازاء جوابهای

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{و یا} \quad x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{و} \quad x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \quad \text{صفر میگردد}$$

۱- برای سهولت رسم منحنی تغییرات تابع فوق $y = x + 2 \cos x - 2$ را مساوی ادا-

و صفر قرار میدهم در اینصورت سه خط $y_1 = x$ و $y_2 = x - 2$

و $y_3 = x - 4$ بدست میآید و بعد نقاط تقاطع منحنی مفروض را با هریک از

خطوط فوق تعیین مینمایم ازینقرار :

اولاً چون معادله $y_1 = x$ و معادله مفروض را با یکدیگر حل کنیم حاصل میشود

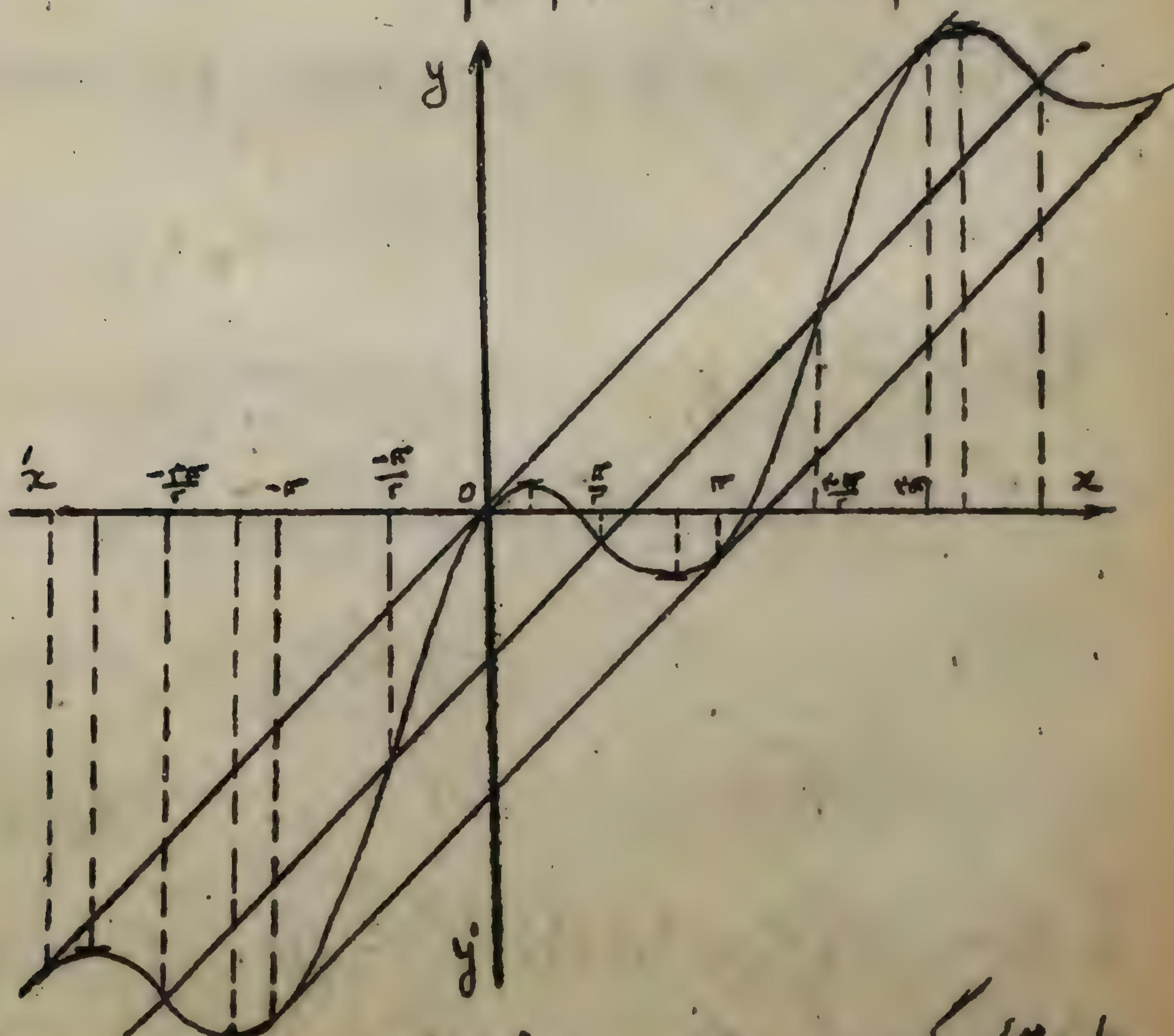
$x = 2k\pi$ و یا $x = (2k+1)\pi$ که طول نقاط تماس منحنی با خط $y_1 = x$ میباشد

ثانیاً چون معادله $y_2 = x - 2$ را با معادله منحنی حل کنیم حاصل میشود $x = -1$

و یا $x = (2k+1)\pi$ که طول نقاط تماس منحنی با خط $y_r = x - 4$ میباشد
 ثالثاً با توجه اگر معادله $y_m = x - 2$ را با معادله منحنی حل کنیم حاصل
 میشود $\sin x = 0$ و یا $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ که عبارتت از طول نقاط

تقاطع منحنی با خط $y_m = x - 2$

۴- حال که خط فوق را رسم نموده و نقاط تماس و نقاط تقاطعی را که قبلاً
 تعیین نموده ایم در روی این خطوط بدست آورده و همچنین نقاط ماکزیموم و مینیموم
 را نیز تعیین نماییم و با متیکل منحنی را رسم میکنیم



طریقه دیگر برای رسم منحنی فوق - ممکن است معادله

$y = x + 2C_1 x - 2$ را بدو تابع $y_1 = x - 2$ و $y_2 = 2C_1 x$ تجزیه نمود
 هر یک از آنها را رسم کرده و از جمع عرضهای مستطای یک طول نقاط منحنی
 مفروض را تعیین نمود

مسائل

۱۶۱- جدول و منحنی تغییرات توابع ذیل را رسم کنید :

$$y = C_1 x \times C_2 (x + \frac{\pi}{2}) \quad y = \ln x + \sqrt{x} C_1 x$$

$$y = \ln x - \ln x \quad y = 2 \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + 1$$

$$y = C_1 \ln x - C_2 x \quad (0 < x < \pi) \quad y = \ln x (1 - C_1 x)^2$$

$$y = \ln' x + \operatorname{tg} x \quad y = \ln x \pm C_1 x \quad - 162 \times$$

$$y = \ln^2 x (1 - C_1 x) \quad y = 3 \ln x + 2 C_1 \ln x - 3$$

$$y = C_1 \ln x - m C_2 x \quad y = \ln x + \frac{1}{p} \ln x + \frac{1}{q} \ln x$$

$$y = C_1 x + \frac{1}{r} C_2 x + \frac{1}{s} C_3 x + \frac{1}{\omega} C_4 x \quad - 163$$

$$y = \operatorname{tg} x + a \ln x \quad (a = 4, a = -\frac{x}{\pi}, a = 3, a = 2)$$

$$y = \frac{1 + C_1 x}{1 - C_1 x} \quad y = \frac{3 \ln x}{2 \ln x - 1} \quad y = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1}$$

$$y = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^3 x} \quad y = \frac{\sqrt{x} \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} \quad y = \frac{v}{(\sqrt{2} C_1 x + 1)^2}$$

$$y = \frac{(1+\lambda x)^r}{\lambda x(1-\lambda x)}$$

$$y = \frac{a\lambda x - Cx - 1}{aCx} \quad -194 \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$y = \frac{r\lambda^r x - \omega\lambda x + 1}{r\lambda^r x - \omega\lambda x + 1}$$

$$y = \frac{Cx + \lambda x - 1}{Cx - \lambda x - r}$$

$$y = \frac{\lambda x + Cx - r}{\lambda x + \sqrt{r} Cx - 1}$$

$$y = \frac{1 + \lambda^r x}{1 - \lambda x}$$

$$y = \frac{\lambda x}{\lambda d} + \frac{\lambda d}{\lambda x} \quad 0 \leq x \leq \pi \quad y = \frac{mCx + m^r}{mCx + m^r + 1} \quad -199$$

$$y = \lambda(a-x)\mu(a+x) \quad -\frac{\pi}{r} \leq x \leq \frac{\pi}{r}$$

$$y = \lambda^r x - r\lambda^r x + 1 \quad y = \lambda x - Cx + \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r}} \lambda x Cx$$

$$y = \sqrt{r\lambda x - 1}$$

$$y = \sqrt{1 + rCx - \lambda x}$$

$$y = \sqrt{-rCx + rCx + 1}$$

$$y = \sqrt{\frac{rCx + 1}{rCx - 1}}$$

$$y = x \pm \lambda x$$

$$y = x - r \pm Cx \quad -194$$

$$y = rx - Tfx$$

$$y = \frac{\lambda x}{x}$$

$$y = \frac{Tfx}{x}$$

$$y = rx - r + rCx - \lambda x$$

$$y = \sqrt{\frac{x\lambda x}{1 - Cx}}$$

۹۵- تغییرات تابع $y = x^3 + px + q$ و بحث در ریشه
جوابهای معادله درجه سوم $x^3 + px + q = 0$

۱- تابع فوق بازار جمع مقادیر x اقصای است

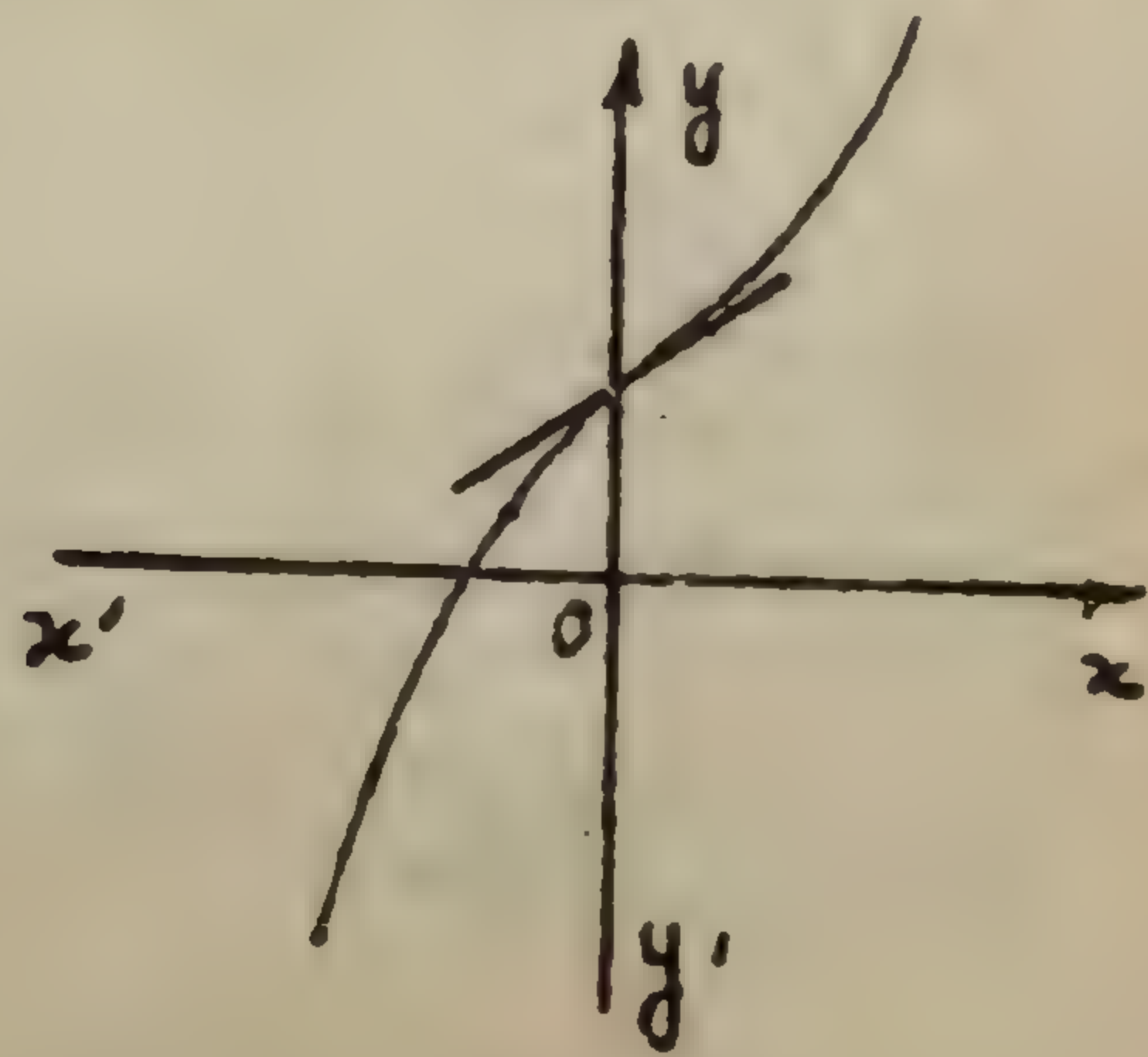
۲- بازار $x=0$ حاصل میشود $y=q$

۳- مشتق تابع عبارتست از $y' = 3x^2 + p$ که بر حسب آنکه p مثبت یا منفی باشد
در آن دو حالت ذیل را میتوان تشخیص داد

اولاً $p > 0$ در این صورت مشتق همیشه مثبت و بنابراین تابع بازار جمع مقادیر

صعودیست

جدول و منحنی تغییرات بصورت ذیل میباشد



x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'		$+$	
y	$-\infty$	q	$+\infty$

چنانکه از جدول و منحنی فوق ملاحظه میشود منحنی محور $x'x$ را فقط در یک نقطه تقاطع
میکند و بنابراین معادله $x^3 + px + q = 0$ در این حالت دارای یک جواب است

ثانیاً $x \neq 0$ در اینصورت مشتق دارای دو جواب خواهد بود که عبارتند

از $x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}}$ و چون بازاء هر دو جواب تغییر علامت میدهد

لذا تابع بازاء آنها ماکزیموم و مینیموم میباشد

جدول تغییرات بصورت ذیل خواهد بود :

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{4}{3}}$	0	$+\sqrt{\frac{4}{3}}$	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$\rightarrow -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{4}{3}} + 9$	$\searrow 9$	$\searrow \frac{4}{3}\sqrt{\frac{4}{3}} + 9$	$\rightarrow +\infty$	
		<u>Max</u>		<u>min</u>		

حال بر حسب آنکه مقادیر ماکزیموم و مینیموم متحد علامه یا مختلف علامه بوده و یا یکی از آنها مساوی صفر باشد حالات مختلفه میتوان تشخیص داد در اینصورت کافیت که علامت

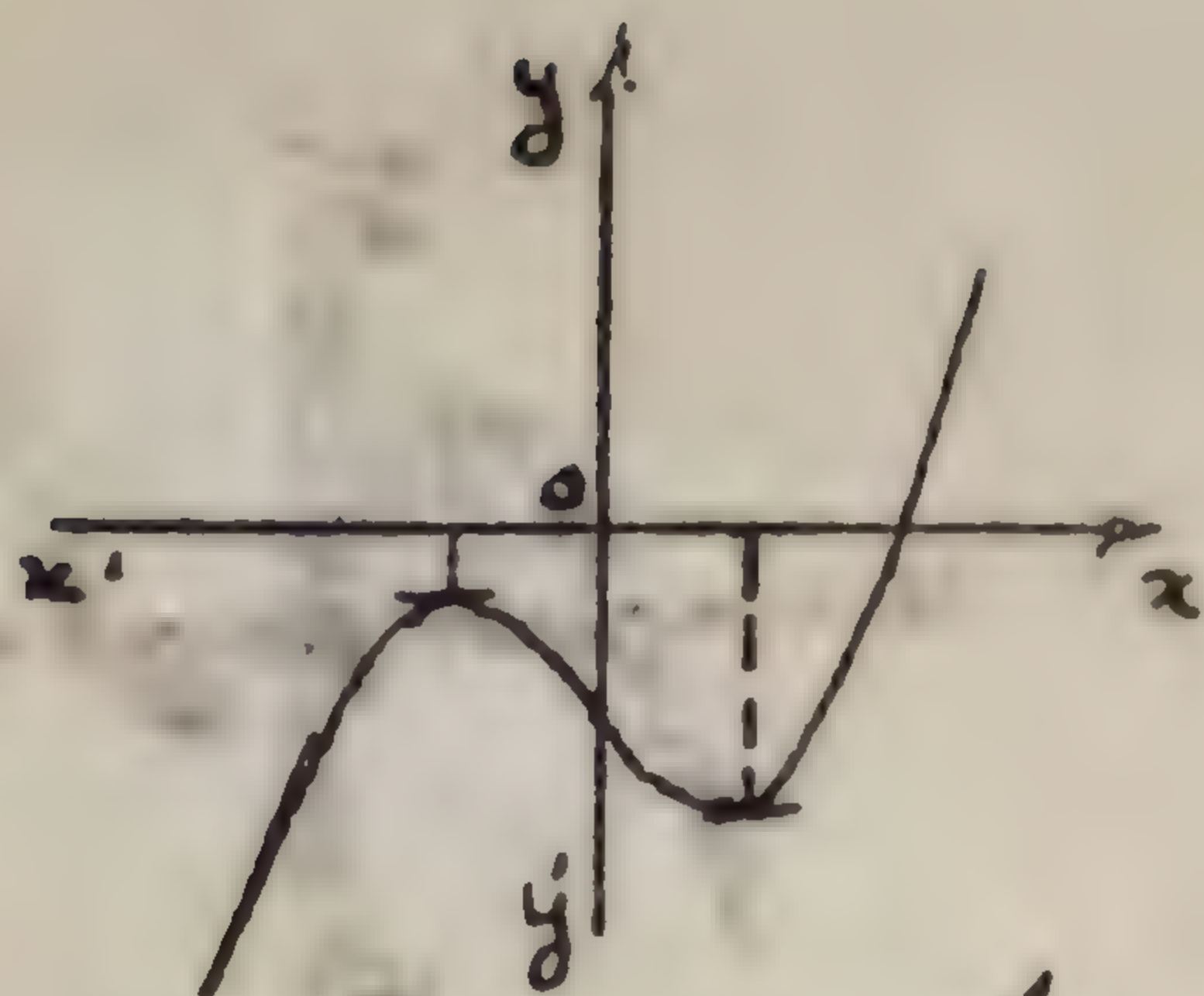
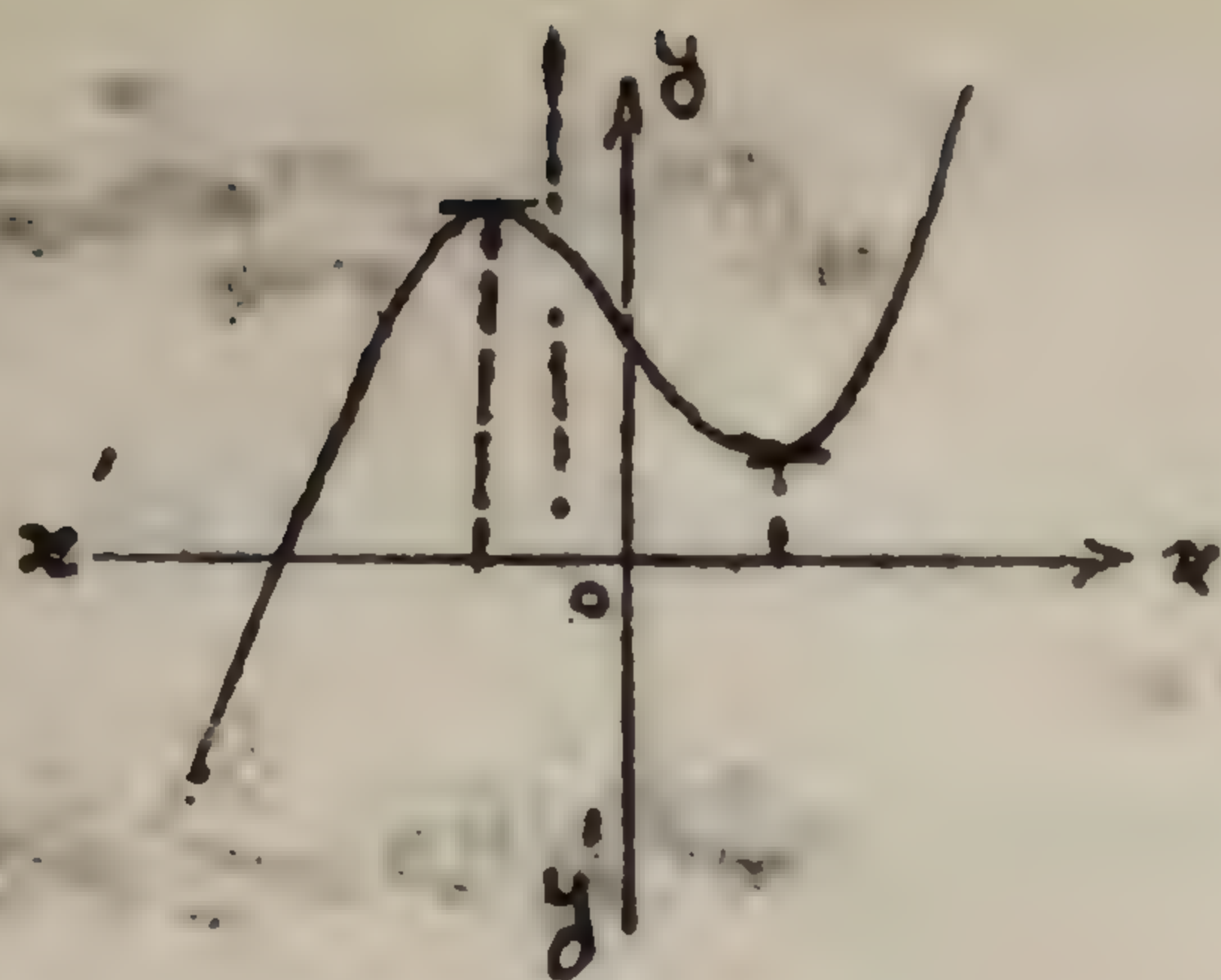
$$\left(-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{4}{3}} + 9\right) \left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{4}{3}} + 9\right) = 9^2 + \frac{4}{27}$$

ذی علامت $4x^3 + 27y^2$ را در نظر گرفت ازینقرار

اولاً $4x^3 + 27y^2 > 0$ در اینصورت مقادیر ماکزیموم و مینیموم هر دو منفی

یا هر دو مثبت خواهند بود و منحنی تغییرات یکی از دو صورت ذیل خواهد

بود .



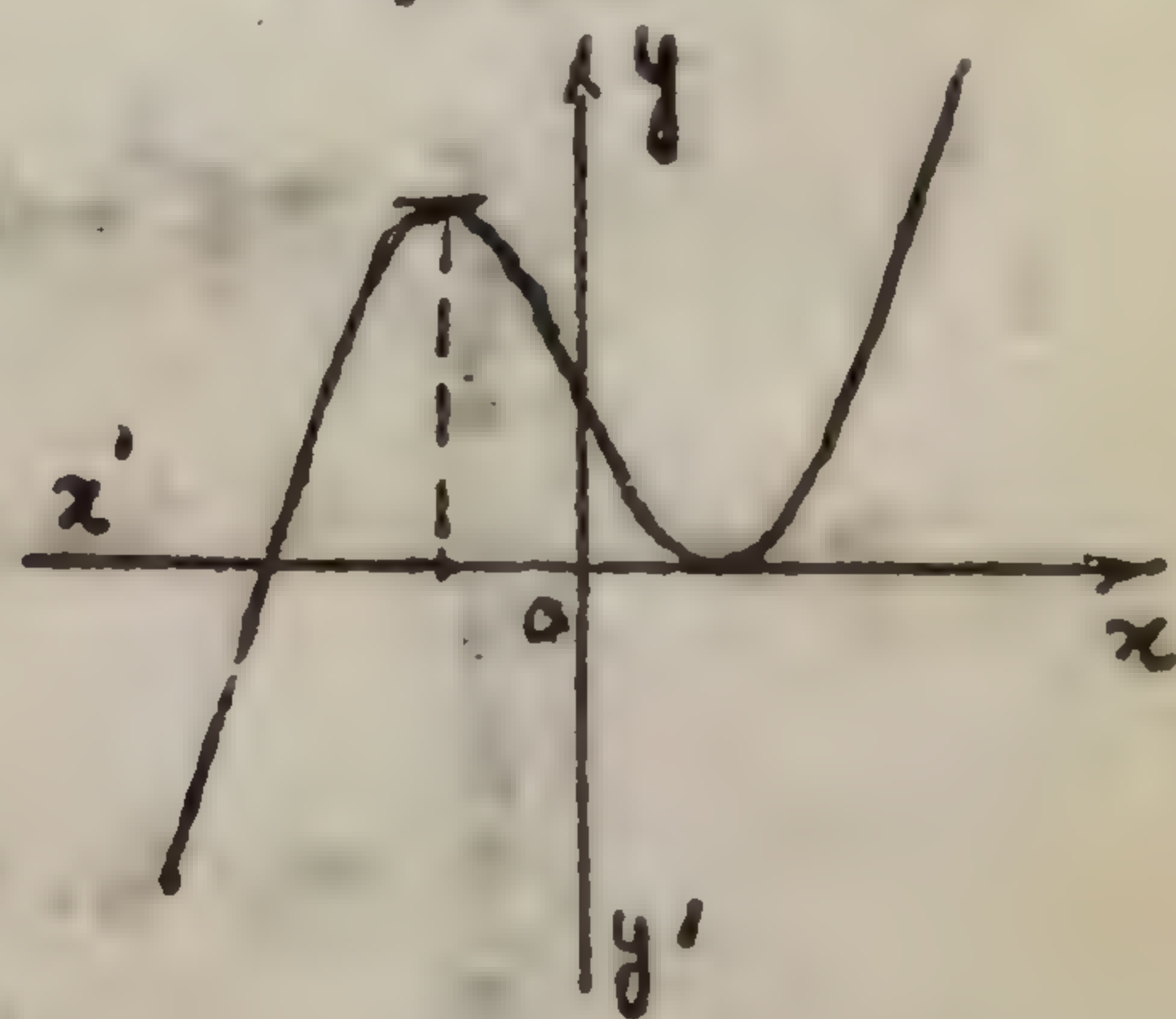
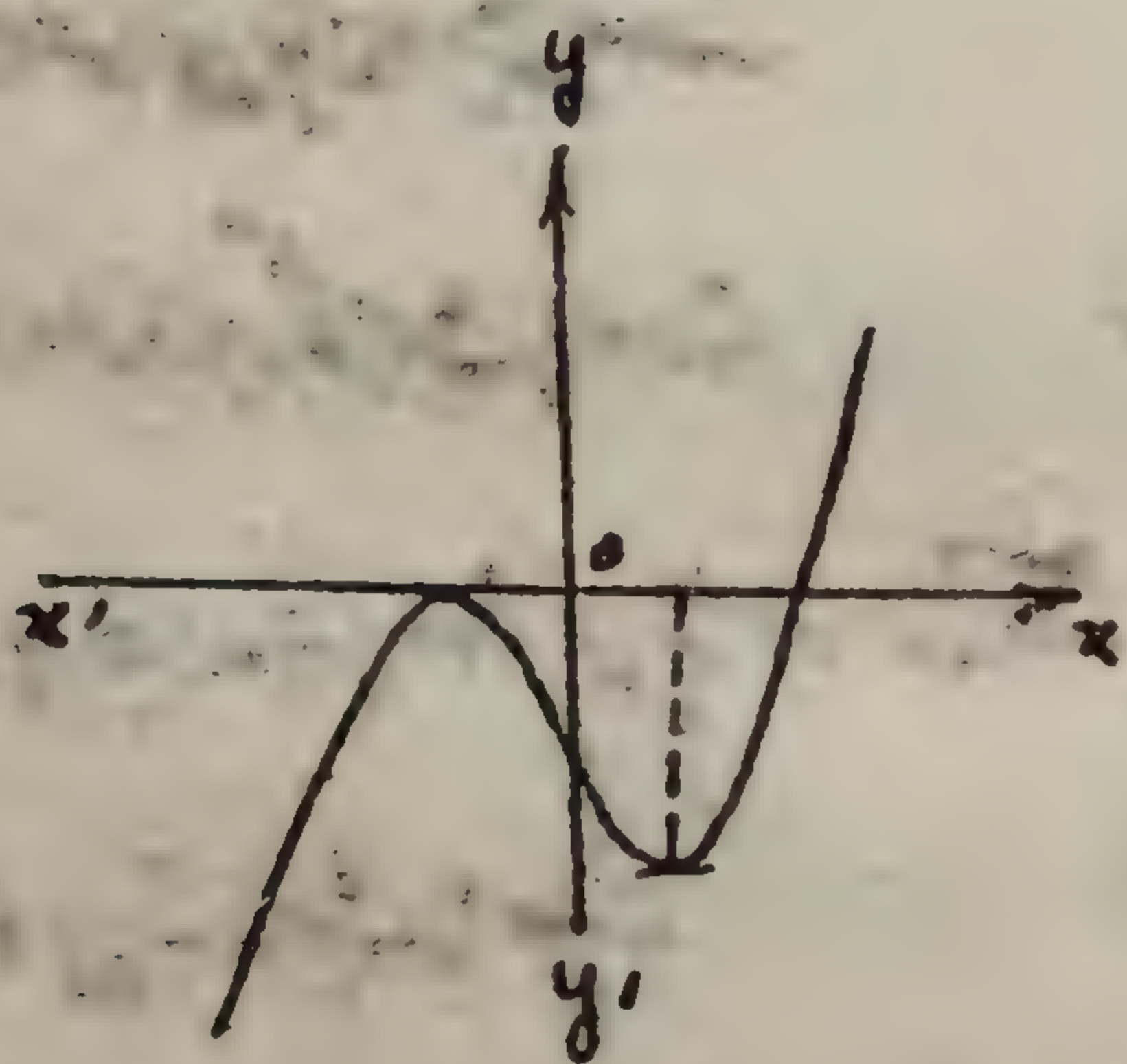
چنانکه از جدول و منحنی فوق ملاحظه میشود در این حالت y فقط بازای یک مقدار

x صفر شده و بنابراین معادله $x^3 + px + q = 0$ دارای یک جواب می باشد

ثانیاً $4p^3 + 27q^2 = 0$ در این حالت ماکزیموم صفر و مینیموم منفی می باشد

و یا مینیموم صفر و ماکزیموم مثبت می باشد و بنابراین منحنی تغییرات یکی از دو

صورت ذیل می باشد :



چنانکه از جدول و منحنی ملاحظه میشود در این حالت منحنی در یک نقطه بر محور x تماس

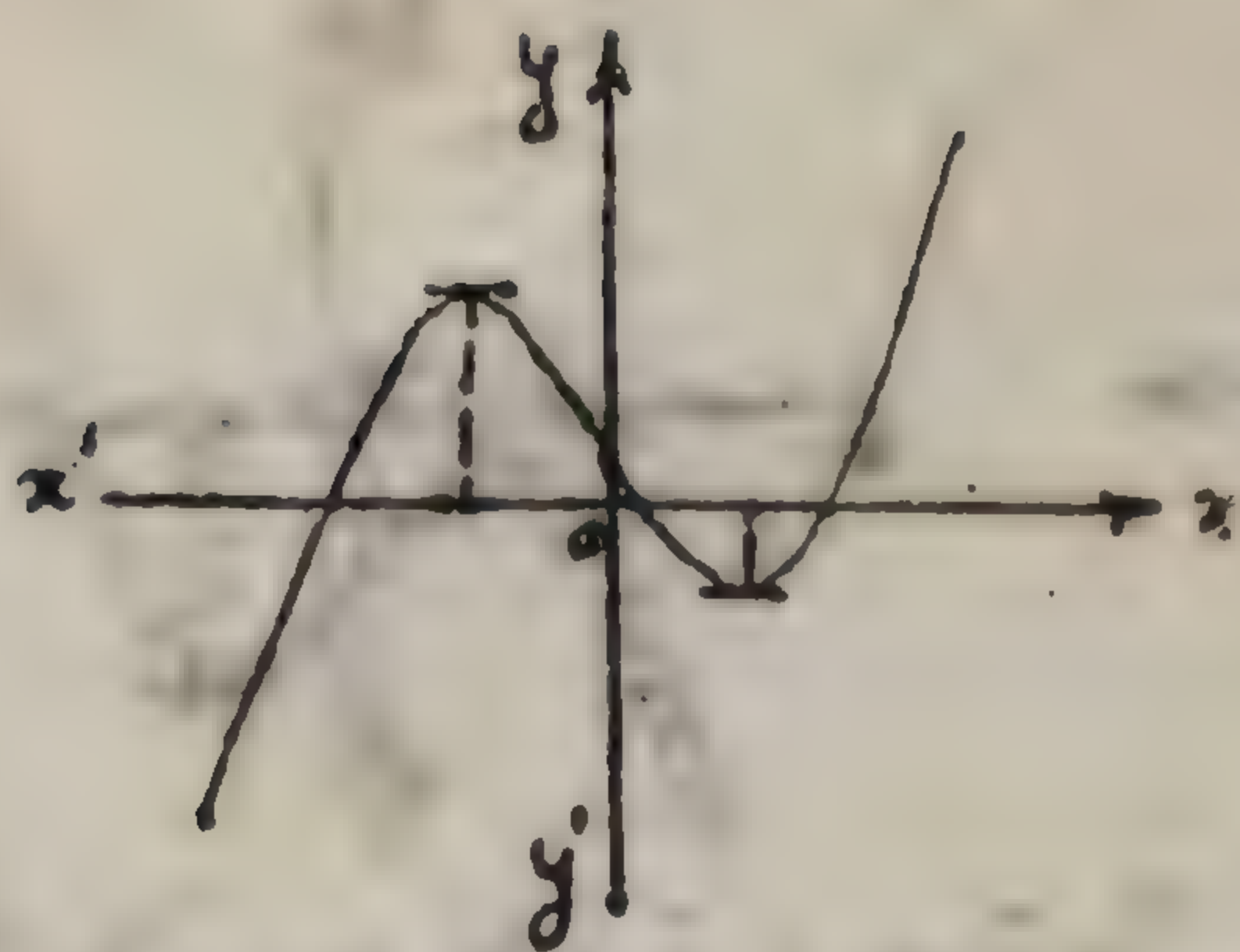
و در یک نقطه آنرا قطع میکند بطوریکه معادله $x^3 + px + q = 0$ در این حالت

دارای یک ریشه مضاعف و یک ریشه ساده می باشد

ثالثاً $4p^3 + 27q^2 < 0$ در این حالت ماکزیموم مثبت و مینیموم منفی می باشد

و منحنی تغییرات تابع بصورت ذیل

میباشد



چنانکه ملاحظه میشود در این حالت

منحنی محور x را در سه نقطه قطع

نموده و بنا بر این معادله $x^3 + px + q = 0$ دارای سه جواب میباشد

جدول ذیل را که حاوی خلاصه بحث در مورد جوابهای معادله $x^3 + px + q = 0$

میباشد باید همواره در خاطر داشت

$p > 0$

معادله فقط دارای یک ریشه است

معادله فقط دارای یک ریشه است

معادله دارای یک ریشه ساده و یک ریشه مضاعف است

معادله دارای سه ریشه است

توضیح - به سبب میتوان ملاحظه نمود که هرگاه $4p^3 + 27q^2 < 0$ باشد

p منفی خواهد بود بطوریکه شرط لازم و کافی برای آنکه معادله درجه سوم

$x^3 + px + q = 0$ دارای سه ریشه باشد آنست که $4p^3 + 27q^2 < 0$ باشد

نقطه عطف تابع $y = x^3 + px + q$ - مشتق ثانی تابع عبارتست

از $y'' = 6x$ که باز از $x=0$ تغییر علامت میدهد بنا بر این در همه حال
 منحنی تغییرات تابع فوق در نقطه $x=0$ یعنی نقطه تقاطع با محور $y'y'$ دارای
 نقطه عطف میباشد که ضریب زاویه مماس بر آن برابر است با 6 و بسبب
 میتوان تحقیق نمود که نقاط منحنی نسبت باین نقطه قرینه میباشند

مسائل

۱۶۸- جدول و منحنی تغییرات توابع ذیل را رسم نموده و از روی منحنی عدد جوابهای
 معادلات $y=0$ و علامات آنها را تحقیق کنید

$$y = x^3 + 2x + 1$$

$$y = x^3 - 3x + 4$$

$$y = x^3 - 6x + 6$$

$$y = x^3 - 3x + 2$$

۱۶۹- تابع $y = x^3 + 6x + 6$ مفروض است مطلوبست محاسبه مقادیر 6
 بطریقیکه اولاً معادله $y=0$ دارای یک جواب ثانیاً دارای یک ریشه ساده
 و یک ریشه مضاعف ثالثاً دارای سه ریشه باشد و جدول و منحنی تغییرات تابع را باز
 رسم کنید $6=0$ و $6=1$ و $6=-\frac{27}{4}$ رسم کنید

۱۷۰- تابع $y = x^3 + (a-1)x + b$ که در آن a و b مختصات نقطه مفروضه M واقع
 در سطح دو محور است مفروض است مطلوبست مکان نقطه M برای آنکه معادله دارای
 یک یا دو یا سه جواب باشد

ماکرزیوم و سیموم بعضی عبارات

۹۶- قضیه ۱- حاصل ضرب چندین عامل مثبت متغیر که مجموعشان ثابت باشد ماکرزیوم است هرگاه جمع عوامل با یکدیگر مساوی باشند

m عامل مثبت متغیر x و y و z و \dots و u و v را فرض میکنیم که مجموع آنها $a = x + y + z + \dots + u + v = c \cdot z = m \cdot a$ باشد حال ثابت میکنیم که حاصل ضرب آنها هر چه که عوامل فوق نسبت a میل نماید ترقی مینماید

اثبات - واضح است که اگر عوامل فوق همگی مساوی a نباشند ناچار بعضی از آنها کوچکتر از a و بعضی بزرگتر از a خواهند بود مثلاً فرض میکنیم $x > a$ و $y < a$ باشد حال اگر $x = a + d$ فرض شود حاصل ضرب عوامل فوق بصورت ذیل درمیآید :

$$(1) \quad P = (a+d) \times y \times z \times \dots \times u \times v$$

و چون از جمله اول a را کم نموده و برای آنکه حاصل جمع تغییر نکند آنرا بجمعه دوم اضافه کنیم حاصل ضرب جدید P' بدست میآید از استقرار :

$$(2) \quad P' = a \times (y+d) \times z \times \dots \times u \times v$$

که از تفریق رابطه (۱) از رابطه (۲) حاصل میشود :

$$P' - P = \sum x \dots \dots x u v x d(a - y)$$

و چون $y < a$ فرض شده و بسا که d مثبت میباشد نتیجه میشود $P' - P > 0$

و یا $P' > P$

حال اگر این عمل را برای عوامل جدید رابطه (۲) تکرار کنیم حاصل ضرب دیگری مانند P' بدست میآید بطرقی که $P' > P$ باین طریق هر چه عوامل فوق نسبت به میل نمایند حاصل ضرب آنها ترقی میکند و بنابراین در موقعی که یکی مساوی a شوند ماکزیموم میگردد

حالت مخصوص - در صورتیکه عوامل مفروض منحصر بدو جمله باشند

قضیه را بطریق سهلتری میتوان ثابت نمود مثلاً اگر $S = x + y = c = ra$

باشد چون $P = xy$ فرض شود از اتحاد $4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2$

حاصل میشود $xy = P = \frac{a^2 - (x-y)^2}{4}$

و چنانکه در رابطه اخیر ملاحظه میشود P ماکزیموم است هرگاه $\frac{(x-y)^2}{4}$

و یا $x - y$ مینیموم و یا مساوی صفر باشد و از آنجا حاصل میشود $x = y$

تبصره - در صورتیکه نتواند $x = y$ باشد حاصل ضرب فوق ماکزیموم

میگرد و هرگاه $x-y$ مینیموم باشد

۹۷- قضیه ۲- مجموع چندین عامل مثبت متغیر که حاصل ضربشان

ثابت باشد مینیموم است هرگاه و جمیع عوامل با یکدیگر مساوی باشند

m عامل مثبت متغیر x, y, z, \dots, u, v را فرض میکنیم که حاصل

ضربشان $P = x \times y \times z \times \dots \times u \times v = C \pm = a^m$ باشد حال ثابت

میکنیم که مجموع آنها $S = x + y + z + \dots + u + v$ هر چه عوامل

فوق نسبت a میل نمایند تنزل مینماید

اثبات - هرگاه عوامل فوق یکی مساوی نباشند ناچار بعضی از آنها

بزرگتر از a و بعضی کوچکتر از a خواهند بود مستلزم فرض میکنیم $x > a$ و $y < a$

باشد و چون $x = a + d$ فرض شود مجموع بصورت ذیل درمیآید :

$$S = (a + d) + y + z + \dots + u + v \quad (۱)$$

حال از عامل اول a را کم میکنیم و برای آنکه حاصل ضرب تغییر نکند بجای y

y' را قرار میدهم بطریقیکه $(a + d) \times y = a y'$ و بنا بر این

باشد در اینصورت حاصل جمع جدیدی بصورت

$$y' = \frac{(a + d)y}{a}$$

ذیل بدست میآید :

$$(۱) \quad S' = a + \frac{(a+d)y}{a} + z + \dots + u + v$$

که از تفریق روابط (۱) و (۲) حاصل میشود :

$$S' - S = \frac{d(y-a)}{a}$$

و چون $y < a$ و d مثبت میباشد نتیجہ میشود $S' < S$ و یا $S' < S$

حال اگر این عمل را برای عوامل جدید S' تکرار کنیم حاصل ضرب جدید دیگری

مانند S بدست میآید بطریقیکه $S' < S$ یعنی هرچه که عمل نسبت a میل کند

مجموع تئریل میآید و بنابراین در موقعی که همگی مساوی a شوند مجموع مینیموم میگردد

حالت مخصوص - در صورتیکه عوامل فوق سخنرید و جمله باشند

قضیه بطریق سادتری اثبات میگردد و مثلاً فرض میکنیم $a^2 = xy = c^2$ باشد

و چون $S = x + y$ فرض شود از اتحاد $(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy$

حاصل میشود $S^2 = 4a^2 + (x-y)^2$ و چنانکه از عبارت اخیر ملاحظه میشود

همه و بنا بر این که مینیموم است هرگاه $(x-y)^2$ مینیموم و یا مساوی صفر

باشد و از آنجا حاصل میشود $x=y$

تفسیر - در صورتیکه نتواند $x=y$ گردد مجموع فوق مینیموم است هرگاه

$x=y$ مینیموم باشد

۹۸ - قضیه ۳ - هرگاه x و y و z سه عامل مثبت متغیر

باشند بطریقیکه مجموع آنها $S = x + y + z = c$ باشد حاصل ضرب
 قوای آنها $P = x^m \times y^n \times z^r$ ماکزیموم است هرگاه عوامل

فوق متناسب باشند با قوای خود یعنی $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{r}$ باشد
 اثبات - واضح است که حاصل ضرب $x^m \times y^n \times z^r$ ماکزیموم

$$\text{است هرگاه} \quad \frac{x^m \times y^n \times z^r}{m^m \times n^n \times r^r} = \left(\frac{x}{m}\right)^m \times \left(\frac{y}{n}\right)^n \times \left(\frac{z}{r}\right)^r$$

$$\text{و یا} \quad \underbrace{\frac{x}{m} \times \frac{x}{m} \times \dots \times \frac{x}{m}}_{\text{مرتبه } m} \times \underbrace{\frac{y}{n} \times \frac{y}{n} \times \dots \times \frac{y}{n}}_{\text{مرتبه } n} \times \underbrace{\frac{z}{r} \times \frac{z}{r} \times \dots \times \frac{z}{r}}_{\text{مرتبه } r}$$

ماکزیموم باشد و چون مجموع عوامل فوق $c = x + y + z = \frac{mx}{m} + \frac{ny}{n} + \frac{rz}{r}$

میباشد لذا بر طبق قضیه ۱ حاصل ضرب آنها ماکزیموم است هرگاه جمیع عوامل

با یکدیگر مساوی باشند یعنی $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{r}$ باشد

۹۹- قضیه ۲- هرگاه x و y و z سه متغیر مثبت باشند

بطریقیکه حاصل ضرب قوای آنها $x^m \times y^n \times z^r = c$ باشد مجموع

$$S = x + y + z \quad \text{مینیموم است هرگاه} \quad \frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{r}$$

باشد

اثبات - چون حاصل ضرب $x^m \times y^n \times z^r$ ثابت میباشد

$$\text{لذا} \quad \frac{x^m \times y^n \times z^r}{m^m \times n^n \times r^r} = \left(\frac{x}{m}\right)^m \times \left(\frac{y}{n}\right)^n \times \left(\frac{z}{r}\right)^r$$

$$\overbrace{\frac{x}{m} \times \frac{x}{m} \times \dots \times \frac{x}{m}}^{m \text{ مرتبه}} \times \overbrace{\frac{y}{n} \times \frac{y}{n} \times \dots \times \frac{y}{n}}^{n \text{ مرتبه}} \times \overbrace{\frac{z}{p} \times \frac{z}{p} \times \dots \times \frac{z}{p}}^{p \text{ مرتبه}} \quad \text{و یا}$$

نیز ثابت خواهد بود و چون حاصل ضرب عوامل فوق ثابت است لذا بر وفق

قضیهٔ مجموع آنها $S = \frac{mx}{m} + \frac{ny}{n} + \frac{pz}{p} = x + y + z$ مینویسیم

هرگاه جمع عوامل مساوی باشند یعنی $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}$ باشد

موارد استعمال قضایای فوق

مسئله ۱ - باین مثلثات محیط ثابت $2p$ مطلوبست مثلثی که مساحت

آن ماکزیموم باشد

دستور مساحت مثلث بنا بر آنکه اضلاع آن a و b و c و محیط آن $2p$

فرض شود عبارتست از :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

حال مساحت S ماکزیموم است هرگاه $(p-a)(p-b)(p-c)$ ماکزیموم

باشد و چون مجموع عوامل فوق $p-a + p-b + p-c = 3p - (a+b+c) = 3p - 2p = p$ میباشد

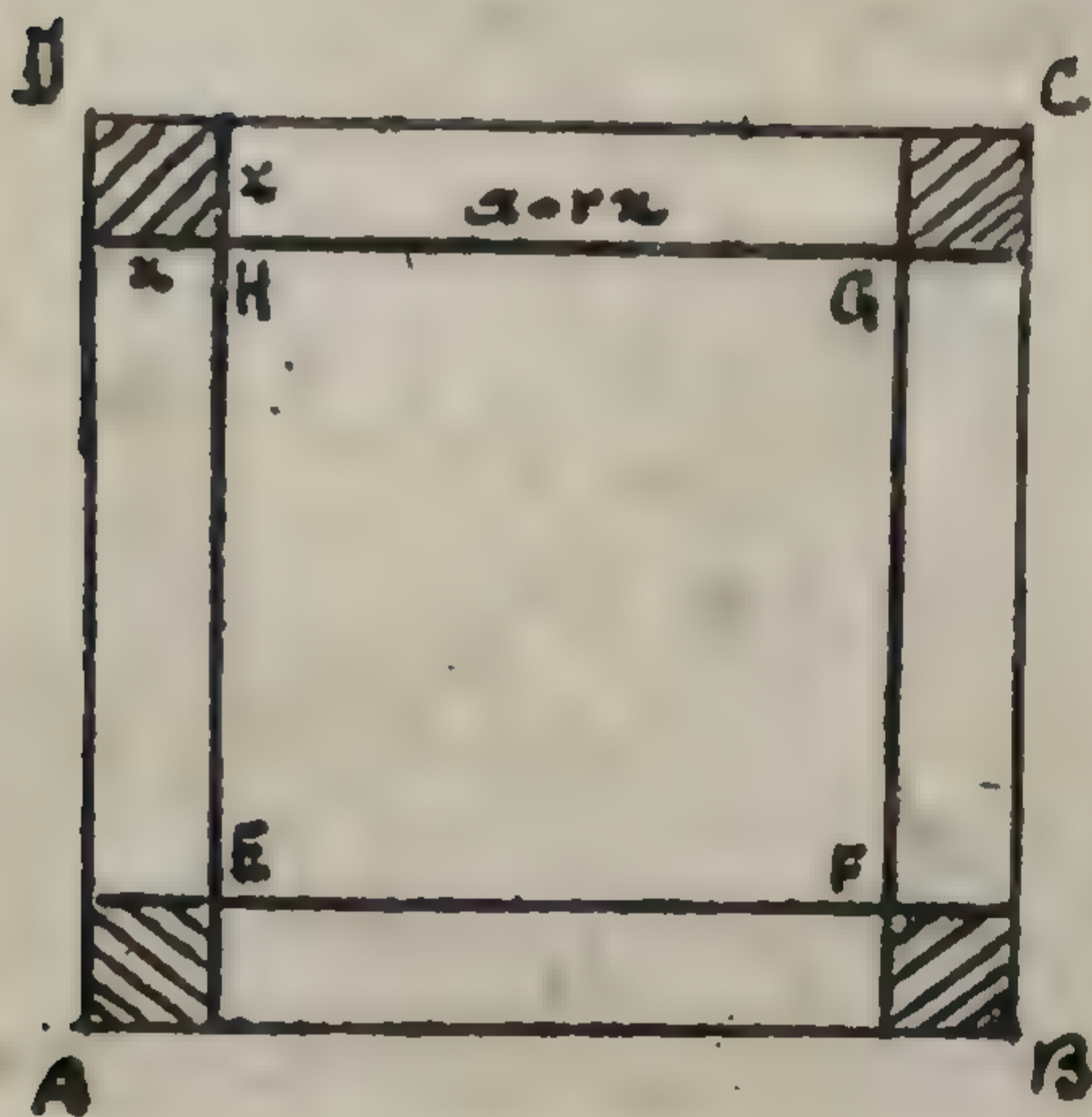
لذا حاصل ضرب آنها ماکزیموم است هرگاه $p-a = p-b = p-c$

و یا $a = b = c$ باشد ازینقرار مثلث ماکزیموم مثلث متساوی الاضلاع

بصنع $\frac{2}{3}p$ میباشد و مساحت مثلث ماکزیموم عبارت میگردد از :

$$S_H = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

مسئله ۲ - صفحه مقوائی $ABCD$ را بضلوع a فرض نموده از چهار گوشه آن چهار مربع بضلوع x بریده و با بقیه سطح جعبه میسازیم بقاعده مربع $EFGH$ مطلوبست تعیین x بطریقی که حجم جعبه ماکزیموم باشد



ضلوع قاعده جعبه $a - 2x$ و ارتفاع

آن x و بنا بر این حجم آن

$$V = x(a - 2x)^2 \text{ می باشد}$$

حجم فوق ماکزیموم است هرگاه

$$2x + (a - 2x) = a \text{ ماکزیموم باشد و چون مجموع}$$

ثابت می باشد لذا بر طبق قضیه ۳ حاصل ضرب قوای آنها ماکزیموم است هرگاه

$$2x = \frac{a - 2x}{2} \text{ و از آنجا } x = \frac{a}{6} \text{ باشد و در این صورت}$$

$$V_H = \frac{2a^3}{27} \text{ حجم ماکزیموم عبارت میگیرد و از}$$

مسئله ۳ - مابین مخروطهای حجم $\frac{1}{3}\pi a^3$ مطلوبست مخروطی

که سطح جانبی آن مینیموم باشد

فرض میکنیم x شعاع قاعده و y ارتفاع مخروط باشد در این صورت

بنابراین $\frac{1}{3}\pi x^2 y = \frac{1}{3}\pi a^3$ و بنابراین $x^2 y = a^3$ خواهد بود

و چون سطح جانبی مخروط فوق را حساب کنیم حاصل میشود $S = \pi x \sqrt{x^2 + y^2}$

حال سطح فوق مینوم است برگاه $x \sqrt{x^2 + y^2}$ و یا مجذور آن $x^2(x^2 + y^2)$

مینوم باشد و چون در عبارت اخیر بجای y مادی آن $\frac{a^3}{x^2}$ را قرار دهیم

عبارت فوق بصورت $x^4 + \frac{a^6}{x^2} = (x^2)^2 + \frac{a^6}{x^2}$ درمیآید

که در آن چون حاصل ضرب $x^2 \times \frac{a^6}{x^2} = a^6$ ثابت میباشد

لذا مجموع توانی آنها مینوم است برگاه $\frac{x^2}{2} = \frac{a^6}{x^2}$ و از اینجا

$$x = a \sqrt[3]{2a^3} \text{ باشد}$$

مسئله ۴ - بر کره شعاع R مخروطی محیط کنید که حجم آن مینوم باشد

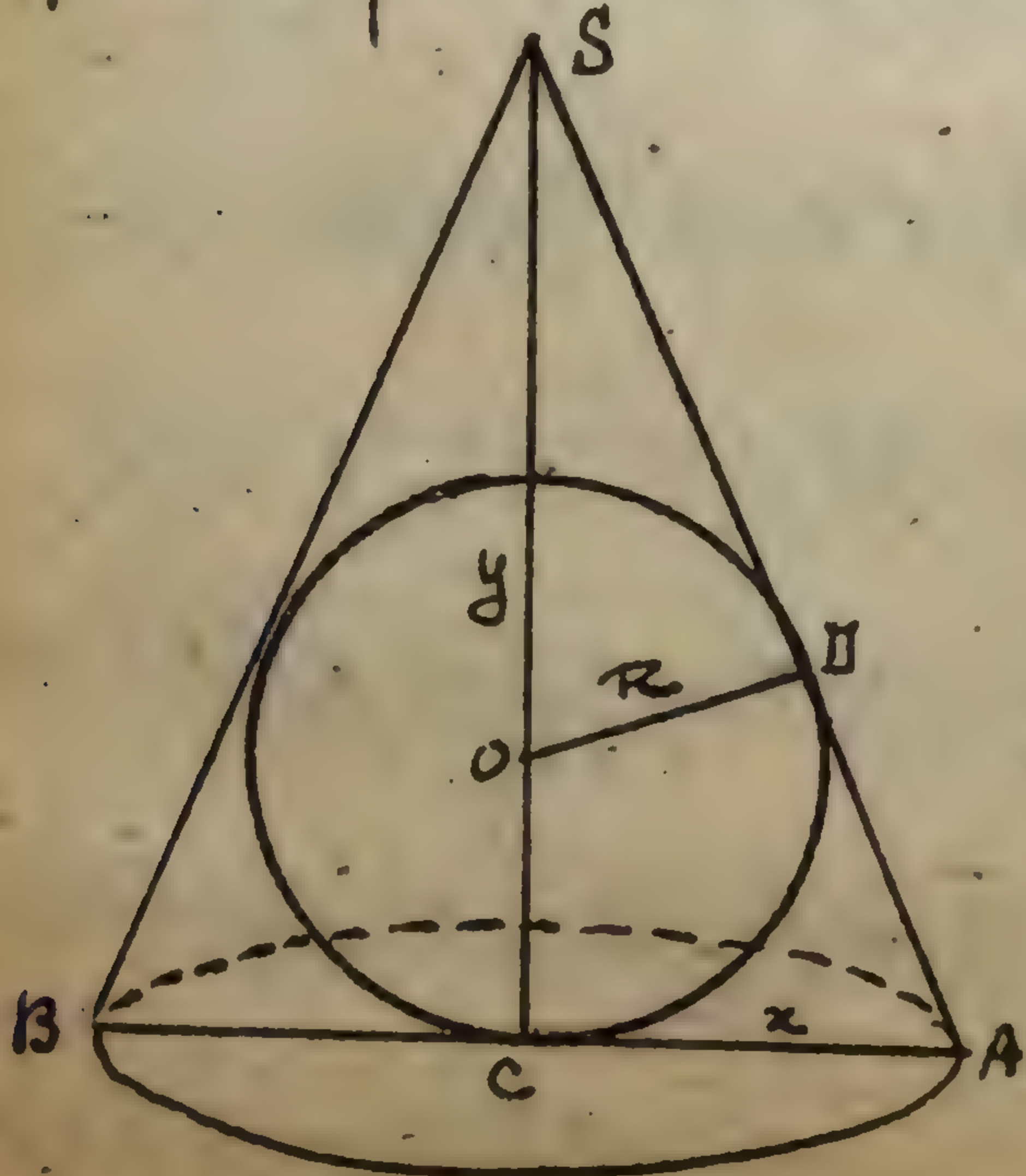
فرض میکنیم x شعاع قاعده مخروط و y

ارتفاع آن باشد در این صورت $V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$

خواهد بود ولی از تشابه دو مثلث SOD

و SAC حاصل میشود :

$$\frac{x}{R} = \frac{y}{\sqrt{y(y-2R)}}$$



$$x = \frac{Ry}{\sqrt{y(y-2R)}} \quad \text{و از آنجا}$$

بطوریکه دستور حجم مخروط بر حسب y عبارت میگردد از :

$$V = \frac{1}{3} \pi x^2 y = \frac{1}{3} \pi R^2 x \frac{y^2}{y-2R}$$

حال حجم V مینیمم است هرگاه $\frac{y^2}{y-2R}$ مینیمم بوده و یا عکس آن $\frac{y-2R}{y^2}$

ماکزیموم باشد ولی عبارت اخیر را میتوان مرتباً بصورت ذیل نوشت :

$$\frac{y-2R}{y^2} = \frac{1}{y} - \frac{2R}{y^2} = \frac{1}{y} \left(1 - \frac{2R}{y}\right)$$

که ماکزیموم است هرگاه $\frac{2R}{y} \left(1 - \frac{2R}{y}\right)$ ماکزیموم باشد و چون مجموع

دو عامل فوق $1 = \frac{2R}{y} + \left(1 - \frac{2R}{y}\right)$ ثابت میباشد لذا حاصل ضرب

آنها ماکزیموم میگردد و در موقعیکه $\frac{2R}{y} = 1 - \frac{2R}{y}$ و از آنجا $y = 2R$

باشد و در اینصورت $x = R\sqrt{2}$ و حجم مخروط مینیمم $V = \frac{1}{3} \pi R^3$ خواهد بود

بحث در منحنی معادله درجه دوم کامل

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

۱۰۰- چون طرفین معادله مفروض را بر x تقسیم حاصل میشود :

$$a + b \times \frac{y}{x} + c \times \frac{y^2}{x^2} + d \times \frac{1}{x} + e \times \frac{1}{x} \times \frac{y}{x} + \frac{f}{x^2} = 0$$

حال اگر در معادله فوق فرض کنیم x میل کند به سمت ∞ بنا بر آنچه میدانیم

بجای عبارت میگرد و از ضرب زاویه خط بجانب منحنی که چون آنرا مساوی m فرض
کنیم معادله فوق بصورت ذیل درمیآید :

$$a + bm + cm^2 = 0 \quad \text{یا} \quad cm^2 + bm + a = 0$$

که معادله درجه دومی است بر حسب m و چون آنرا حل کنیم حاصل میشود :

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}$$

حال بر حسب آنکه $b^2 - 4ac > 0$ یا $b^2 - 4ac = 0$ یا $b^2 - 4ac < 0$ و یا

باشد منحنی $f(x, y) = 0$ دارای مجانب نبوده و یا آنکه دارای دو یا یک خط

مجانب میباشد در صورت اول منحنی $f(x, y) = 0$ از نوع بیضی (دایره

نیز حالت خاصی از بیضی میباشد) و در صورت دوم از نوع سهمی و در صورت سوم

از نوع هذلولی میباشد

حل و بحث معادله کامل درجه سوم

$$(1) \quad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

۱۰۱- حل هر معادله درجه سوم کامل را میتوان بواسطه حذف جمله درجه دوم

آن بکل یک معادله ناقص بصورت $x^3 + px + q = 0$ تبدیل نمود چه اگر

در معادله (۱) فرض کنیم $x = x' - \frac{b}{3a}$ (۲) باشد معادله فوق بصورت

ذیل درمیآید :

$$x^3 + \frac{3ac - b^2}{3a^2} x + \frac{27a^2d - b^3 - 9abc}{27a^3} = 0$$

که در آن چون ضریب جمله درجه اول را p و مقدار معلوم را q فرض کنیم معادله بصورت $x^3 + px + q = 0$ درمیآید حال اگر معادله اخیر را حل کنیم x معلوم میگردد که چون آنرا در رابطه (۳) قرار دهیم x جواب معادله (۱) بدست میآید

حل معادله $x^3 + px + q = 0$ بطریق پیشگفته

۱۰۲- در مثلثات تحقیق نموده ایم که :

$$\cos \alpha = 4 \cos^3 \frac{\alpha}{4} - 3 \cos \frac{\alpha}{4}$$

$$(۲) \quad \cos^2 \frac{\alpha}{4} - \frac{5}{4} \cos \frac{\alpha}{4} - \frac{1}{4} \cos \alpha = 0$$

حال فرض میکنیم $\cos \frac{\alpha}{4} = m$ (۳) باشد در اینصورت معادله (۱)

بصورت ذیل درمیآید

$$m^3 \cos^3 \frac{\alpha}{4} + 4m \cos \frac{\alpha}{4} + q = 0$$

$$(۴) \quad \cos^3 \frac{\alpha}{4} + \frac{4}{m} \cos \frac{\alpha}{4} + \frac{q}{m^3} = 0$$

و چون معادله (۴) را با اتحاد (۲) مقایسه نمائیم حاصل میشود :

$$\frac{p}{m} = \frac{-r}{r}$$

$$\frac{q}{m} = -\frac{1}{r} C_5 \alpha$$

$$p = 2\sqrt{-\frac{r}{2}}$$

$$C_5 \alpha = \frac{39}{24\sqrt{-\frac{r}{2}}} \text{ و از اینجا}$$

حال فرض کنیم که کوچکترین قوس مثبتی باشد بطریقی که $C_5 \alpha = \frac{39}{24\sqrt{-\frac{r}{2}}}$

باشد در این صورت حاصل میشود $C_5 \alpha = C_5$ و از اینجا $\alpha = 2\pi \pm \theta$

و بنابراین $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{2\pi}{\pi} \pm \frac{\theta}{\pi}$ که جوابهای محصور مابین ۰ و 2π در آن

عبارت میگردد و از :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha}{\pi} = \frac{\theta}{\pi} \\ \frac{\alpha}{\pi} = \frac{2\pi}{\pi} - \frac{\theta}{\pi} \\ \frac{\alpha}{\pi} = \frac{2\pi}{\pi} + \frac{\theta}{\pi} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha}{\pi} = 2\pi - \frac{\theta}{\pi} \\ \frac{\alpha}{\pi} = \frac{2\pi}{\pi} + \frac{\theta}{\pi} = 2\pi - (\frac{2\pi}{\pi} - \frac{\theta}{\pi}) \\ \frac{\alpha}{\pi} = \frac{2\pi}{\pi} - \frac{\theta}{\pi} = 2\pi - (\frac{2\pi}{\pi} + \frac{\theta}{\pi}) \end{array} \right.$$

و چون در رابطه (۳) بجای m و $\frac{p}{m}$ مقادیر آنها را قرار دهیم با ملاحظه
آنکه شش دسته قوسهای فوق دو به دو دارای یک m میباشند جوابهای
معادله (۱) بدست میآید ازینقرار :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2\sqrt{-\frac{r}{2}} C_5 \frac{\theta}{\pi} \\ x_2 = 2\sqrt{-\frac{r}{2}} C_5 (\frac{2\pi}{\pi} - \frac{\theta}{\pi}) \\ x_3 = 2\sqrt{-\frac{r}{2}} C_5 (\frac{2\pi}{\pi} + \frac{\theta}{\pi}) \end{array} \right.$$

بحث - واضح است برای آنکه معادله (۱) دارای جواب باشد باید م
وجود باشند برای آن لازم است نامساویهای ذیل محقق باشد :

$$\begin{cases} ۲۰ > ۰ & \text{و یا} \\ ۲۶^۳ + ۲۷۹^۲ > ۰ & \text{و یا} \\ -۱ < \frac{۳۹}{۲۶\sqrt{۳}} < ۱ \end{cases}$$

ولی باید دانست که شرط دوم تنهایی کافیت چه لازمه این شرط آنست که
۲۰ باشد در حالتیکه $۲۶^۳ + ۲۷۹^۲ > ۰$ باشد معادله را بطریقه جبری

ذیل حل میکنیم :

حل جبری معادله (۱) $x^۳ + ۱x + ۹ = ۰$

۱۰۳ - در معادله (۱) فرض میکنیم $x = y + z$ (۲) باشد در اینصورت
معادله بصورت ذیل درمیآید :

$$(۳) \quad y^۳ + (۳yz + ۱)(y + z) + z^۳ + ۹ = ۰$$

حال میتوان مقادیر y و z را بطریقی انتخاب نمود که ضریب $y + z$ در

معادله (۳) مساوی صفر گردد یعنی $۳yz + ۱ = ۰$ و از آنجا $yz = -\frac{۱}{۳}$

باشد در اینصورت از معادله (۳) حاصل میشود :

$$y^۳ + z^۳ + ۹ = ۰ \quad \text{و از آنجا} \quad y^۳ + z^۳ = -۹$$

و چون $\frac{1}{y^3} = \left(\frac{1}{x^3}\right)^2 = \frac{1}{x^6}$ فرض شده است لذا y^3 و x^3 ریشه های معادله

درجه دوم ذیل خواهند بود :

$$(۴) \quad u^2 + 9u - \frac{4}{27} = 0$$

که چون آنرا حل کنیم حاصل میشود :

$$u = -\frac{9}{2} \pm \frac{1}{6} \sqrt{\frac{4 \cdot 4^3 + 27 \cdot 9^2}{3}}$$

و بنا بر این :

$$\begin{cases} y^3 = -\frac{9}{2} + \frac{1}{6} \sqrt{\frac{4 \cdot 4^3 + 27 \cdot 9^2}{3}} \\ z^3 = -\frac{9}{2} - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{4 \cdot 4^3 + 27 \cdot 9^2}{3}} \end{cases}$$

حال از روابط اخیر کعب استخراج میکنیم تا حاصل شود :

$$\begin{cases} y_1 = \sqrt[3]{-\frac{9}{2} + \frac{1}{6} \sqrt{\frac{4 \cdot 4^3 + 27 \cdot 9^2}{3}}} \\ y_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} y_1 \\ y_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} y_1 \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 = \sqrt[3]{-\frac{9}{2} - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{4 \cdot 4^3 + 27 \cdot 9^2}{3}}} \\ z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} z_1 \\ z_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} z_1 \end{cases}$$

$\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ و $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ کعبهای موهومی واحد هستند چه اگر کعب واحد را

مساوی x فرض کنیم حاصل میشود $x^3 = 1$ و یا $x^3 - 1 = 0$ که آنرا

بصورت ذیل میتوان نوشت

$$(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$$

که جوابهای آن عبارتست از $x=1$ و $x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

حال بر طبق رابطه (۲) مقادیر y و z را نظیر بنظر جمع میکنیم تا جوابهای

معادله مفروض بدست آید ازینقرار :

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt[3]{\frac{-9}{r} + \frac{1}{6} \sqrt{\frac{4r^3 + 27q^2}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{-9}{r} - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{4r^3 + 27q^2}{3}}} \\ x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} (y_1 + x_1) \\ x_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} (y_1 + x_1) \end{cases}$$

دستورات فوق موسومند بدستورات Cardan

بحث - در دستورات فوق شرط جواب آنست که :

$$\frac{4r^3 + 27q^2}{3} \geq 0 \quad \text{و یا} \quad 4r^3 + 27q^2 \geq 0$$

باشد

تابع اولیه - سطح منحنی

۱۰۴ - تعریف - تابع اولیه $y = f(x)$ عبارتست از تابع $y = F(x)$ که مشتق آن $y = f(x)$ باشد

هرگاه $F(x)$ تابع اولیه $f(x)$ باشد کلیه توابع $F(x) + c$ که در آنها c نمایش مقدار است ثابت تابع اولیه $f(x)$ خواهند بود بطوریکه برای هر تابعی بینهایت تابع اولیه میتوان فرض نمود که تفاضل آنها مقدار است ثابت

اینک در جدول ذیل تابع اولیه بعضی توابع را که در حل مسائل مورد احتیاج

است یادداشت می‌نمایم

تابع اولیه

$$y = ax + c \text{ (مقدار ثابت)}$$

$$y = \frac{a}{m+1} x^{m+1} + c$$

$$y = -Cx + c$$

$$y = -\frac{a}{m} C_m x + c$$

$$y = \ln x + c$$

$$y = \frac{a}{m} \ln mx + c$$

$$y = \operatorname{tg} x + c$$

$$y = -cf x + c$$

$$y = \frac{1}{v} (x - \frac{1}{v} \ln x) + c$$

$$y = \frac{1}{v} (x + \frac{1}{v} \ln x) + c$$

$$y = \operatorname{tg} x - x + c$$

تابع

$$y = a$$

$$y = ax^m$$

$$y = \ln x$$

$$y = a \ln mx$$

$$y = C_m x$$

$$y = a C_m x$$

$$y = \frac{1}{C'_x}$$

$$y = \frac{1}{\ln x}$$

$$y = \ln x = \frac{1}{v} (1 - C_v x)$$

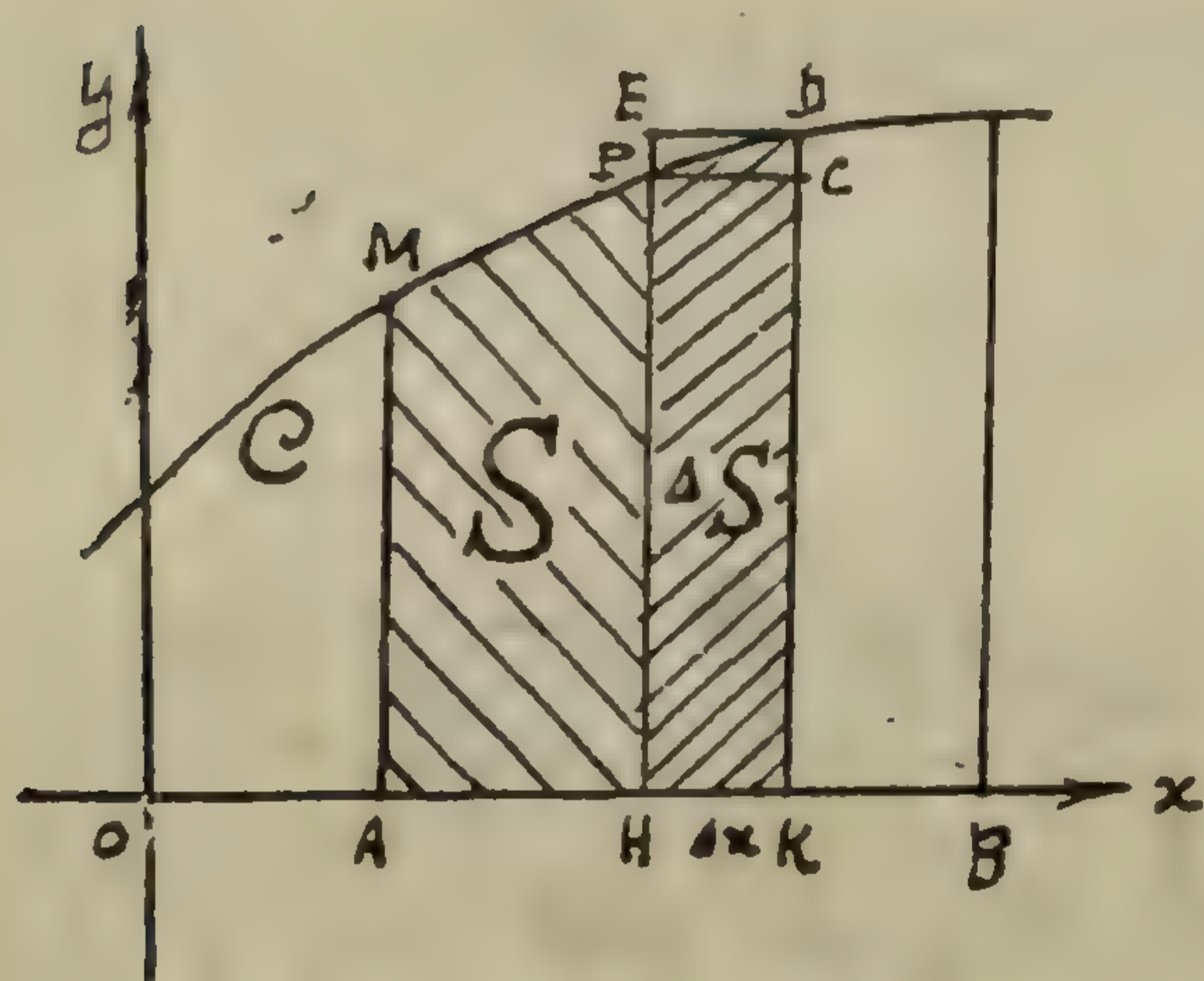
$$y = C'_x = \frac{1}{v} (1 + C_v x)$$

$$y = \operatorname{tg}' x = \frac{1}{C'_x} - 1$$

۱.۵ - تذکره - هرگاه تابع $y = f(x)$ در فاصله a و b انقضالی

باشد اولاً سطح محدود دایمین منحنی و محور x و اردنه ثابت بطول a
 و اردنه متغیر بطول x ($a < x < b$) تابعی است از x ثانیاً
 مشتق این تابع برابر است با y اردنه بطول x
 فرض میکنیم منحنی c نمایش تغییرات تابع $y = f(x)$ باشد که در فاصله

$$\overline{OB} = b \text{ و } \overline{OA} = a$$



اتصال باشد

اردنه متغیر \overline{HP} را

بطول $\overline{OH} = x$ ($a < x < b$)

فرض میکنیم

اولاً واضح است که سطح حادث دایمین منحنی و محور x و اردنه ثابت \overline{AM}
 و اردنه متغیر \overline{HP} بطول $\overline{OH} = x$ بر حسب x تغییر نموده و بنا بر این تابعی
 است از x بطوریکه میتوان نوشت $S = F(x)$

ثانیاً باید تحقیق نمود که $y = f(x) = F'(x) = S'$ زیرا اگر به $\overline{OH} = x$

نموی مانند $\overline{HK} = \Delta x$ بدسیم برای y نیز نموی مانند $\overline{CD} = \Delta y$ و برای

سطح مختلط ΔS نیز نموی حاصل میشود برابر با $\Delta S \approx \overline{AHPM}$

که آنرا به ΔS نمایش میدیم حال بسبب ملاحظه میشود که سطح ΔS محصور است
 مابین دو سطح $HKCP$ و $HKDE$ بطوریکه میتوان نوشت:

$$HKCP < HKDP < HKDE$$

$$y \times \Delta x < \Delta S < \Delta x (y + \Delta y) \quad \text{و یا}$$

و چون Δx را مثبت فرض نموده طرفین را بر آن تقسیم کنیم حاصل میشود:

$$y < \frac{\Delta S}{\Delta x} < y + \Delta y$$

حال فرض میکنیم Δx میل کند نسبت صفر در اینصورت حد طرفین نامساوی

فوق y و حد $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ چون S تابعی است از x عبارتت از S'

بطوریکه میتوان نوشت $S' = y = f(x)$

در حالتیکه Δx را منفی فرض کنیم نامساویهای فوق در جهت مخالف

برقرار بوده و همان نتیجه بدست میآید

۱۰۶- مورد استتعال- مسئله کلی- تابع $y = f(x)$ که

در فاصله a و b اتصالی است مفروض است مطلوبت عبارت سطح

حادث مابین منحنی و محور x و عرض ثابت بطول h و عرض متغیر بطول

$$x = (a < x < b)$$

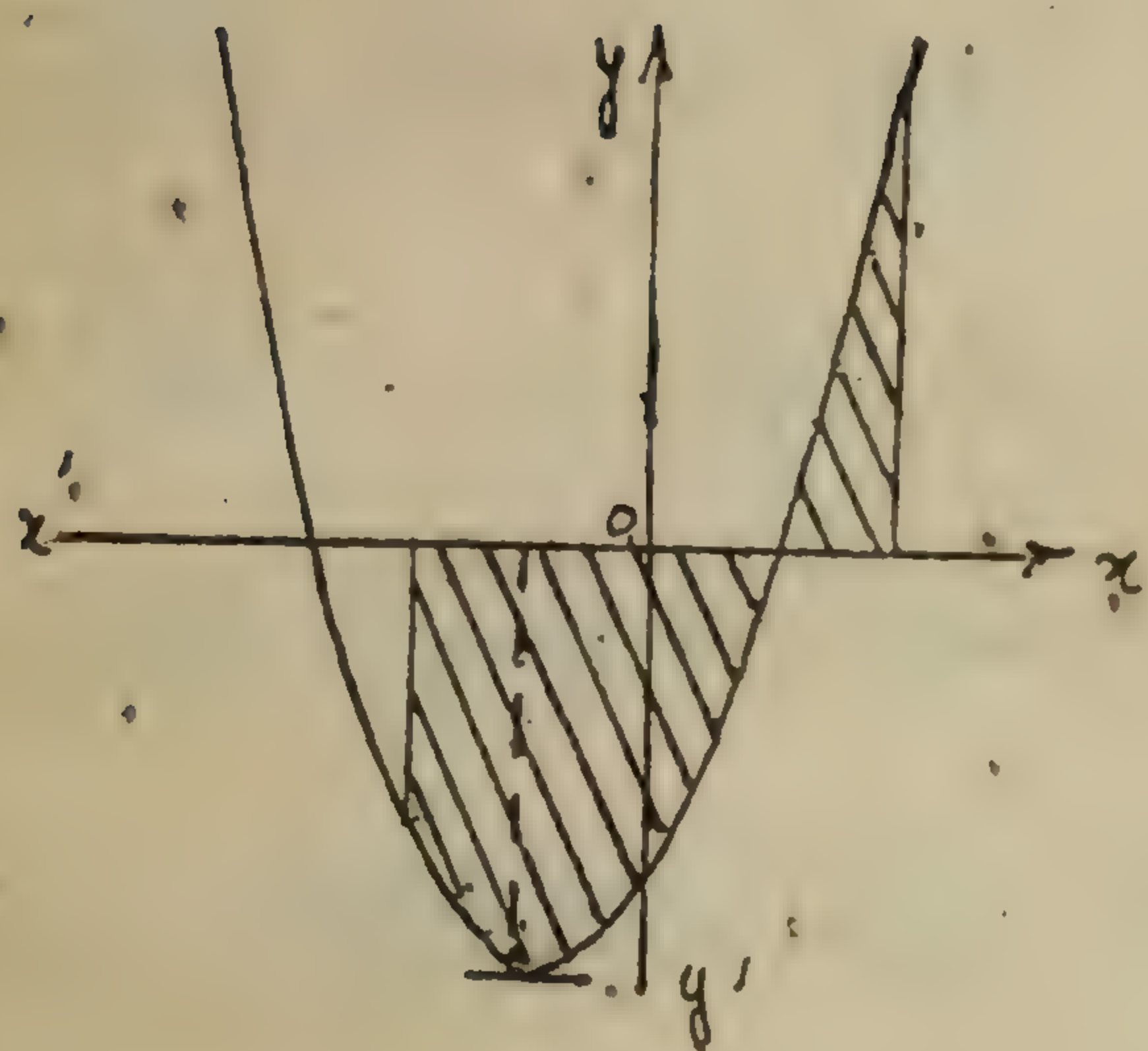
بنابر قضیه فوق $y = f(x) = S'$ میباشد یعنی عبارت سطح مطلوب یکی
از توابع اولیه $y = f(x)$ میباشد بطوریکه هرگاه سطح فوق را به S بنامیم
حاصل میشود: $S = F(x) + C$ که

حال برای محاسبه مقدار ثابت C ملاحظه میکنیم که سطح فوق بازاء
 $x = a$ صفر میگردد بنابراین $S = F(a) + C = 0$ و از اینجا
 $C = -F(a)$ خواهد بود بطوریکه دستور سطح مطلوب عبارت میگردد از:

$$S = F(x) - F(a)$$

دستور اخیر را برای محاسبه سطح منحنی باید همواره در خاطر داشت
معمولاً سطح حادث باین منحنی $y = f(x)$ و محور $x'x$ وارده نامی بطول
 a و b را بصورت ذیل نمایش میدهند $\int_a^b f(x) dx$
مثال ۱- منحنی $y = x^2 + 2x - 3$ مفروض است مطلوب است اولاً
محاسبه سطح محصور باین منحنی و محور $x'x$ و عرض نقطه بطول ۲ ثانیاً محاسبه
سطح حادث باین منحنی و محور $x'x$ و محور $y'y$ ثالثاً سطح حادث باین
منحنی و محور $x'x$ و عرضهای نقاط بطول ۲ - و ۲ +
چون $F(x)$ را حساب کنیم حاصل میشود:

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x$$



اولاً سطح محصور باین منحنی و محور $x'x$ و

عرض نقطه بطول ۲ عبارت میگردد

از $S_1 = F(2) - F(1) = \frac{7}{3}$

ثانیاً سطح حادث باین منحنی و محور $x'x$

و محور $y'y$ برابر است با $S_2 = F(1) - F(0) = -\frac{5}{3}$ که چون مقصود

قدر مطلق سطح است مقدار آن مساوی میگردد با $\frac{5}{3}$

ثالثاً برای محاسبه سطح حادث باین منحنی و محور $x'x$ و عرضهای نقاط

بطول ۲ و ۲ - ملاحظه میکنیم که سطح مزبور از دو قسمت تشکیل یافته است که یکی مرکب

است از اردنه های مثبت و در فوق محور $x'x$ واقع بوده و بنا بر این مقدار

آن مثبت است و دیگری مرکب است از اردنه های منفی و در زیر محور $x'x$

واقع بوده و بنا بر این مقدار آن منفی است بطوریکه $F(2) - F(-2)$

مجموع جبری دو سطح فوق خواهد بود ولی چون همواره منظور اندازه قدر مطلق سطح

است لذا دو جزء فوق را در و - فرض نموده هر یک را جداگانه حساب میکنیم

و بعد قدر مطلق آنها را با یکدیگر جمع مینمائیم ازینقرار حاصل میشود :

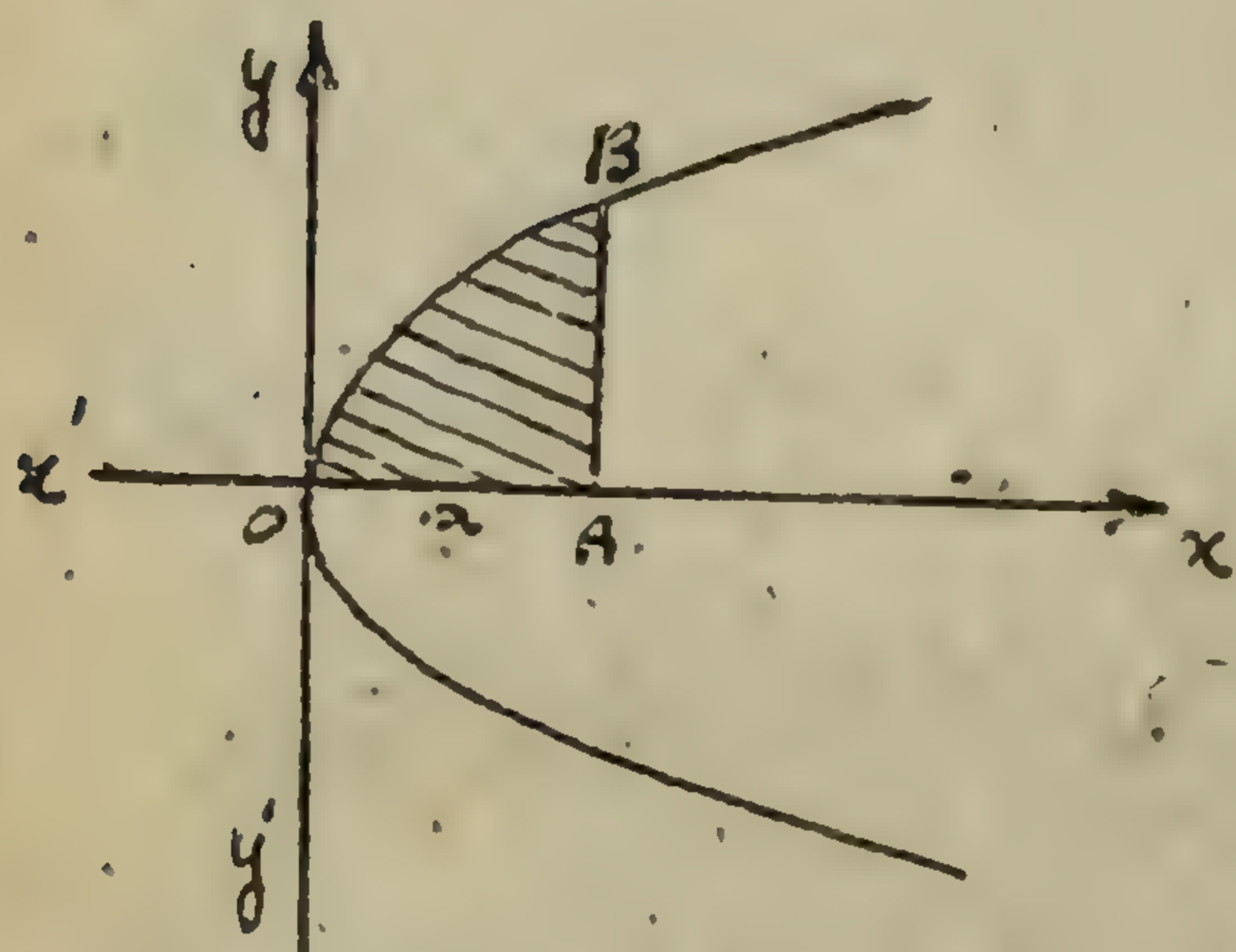
$$A = F(2) - F(1) = \frac{7}{3}$$

$$A' = F(1) - F(-2) = -9$$

بنابرین $S_m = \frac{7}{3} + 9 = \frac{34}{3}$ سطح مطلوب خواهد بود

مثال ۲- سهمی $y^2 = 24x$ مفروض است مطلوبست محاسبه سطح

حادثه بامین منحنی و محور $x'x$ وارونه بطول a



چون معادله را بحسب y حل کنیم

$$y = \pm \sqrt{24x} = \pm \sqrt{24} x^{\frac{1}{2}}$$

حال سطح OAB را حساب میکنیم که در آن

منحنی OB نظیر معادله $y = +\sqrt{24}x$ میباشد

باستطریق که $F(x)$ یکی از توابع اولیه $y = \sqrt{24}x^{\frac{1}{2}}$ را حساب میکنیم تا حاصل

شود $F(x) = \frac{2}{3} \sqrt{24} x^{\frac{3}{2}}$ و بنابرین سطح مطلوب عبارت میگردد

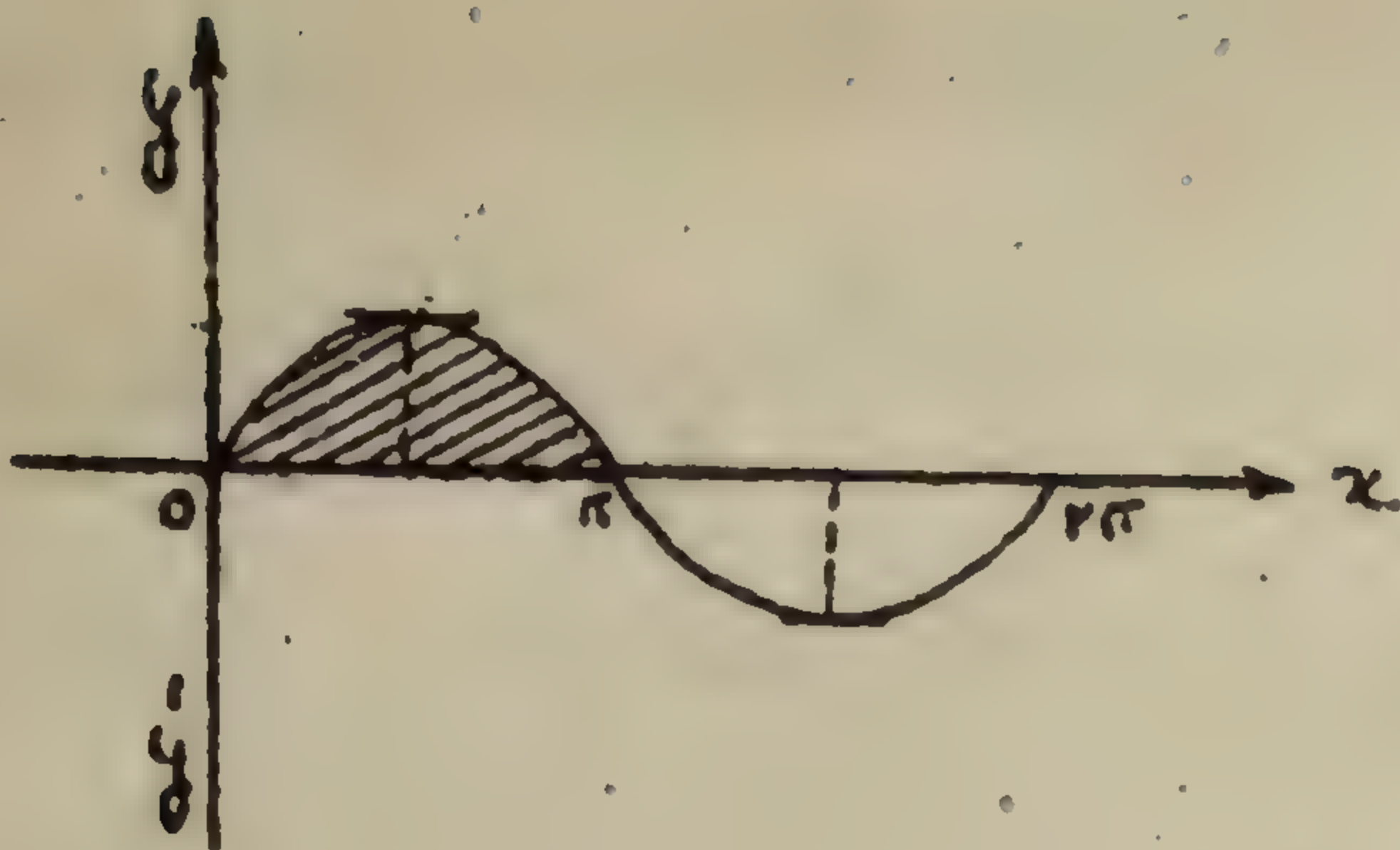
$$S = F(a) - F(0) = \frac{2}{3} \sqrt{24} a^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{24} a^{\frac{3}{2}}$$

مثال ۳- مطلوبست سطح حادثه بامین منحنی $y = 1-x$ و محور $x'x$

قسمتی که در بالای محور واقع است (x محور بامین ۰ و ۲۵ میباشد)

در مثال فوق $F(x) = -Cx$ و سطح مطلوب محور است بامین

(۲۱۸)



از دانه بطول ۰ و π و بنا بر این

مقدار آن برابر میگردد با

$$S = F(\pi) - F(0) = 2$$

مسائل

۱۸۱- منحنی تغییرات توابع ذیل را رسم نموده و سطح حادث مابین منحنی و محور x' و عرضهای نقاط بطول ۱ و ۲ را حساب کنید :

$$y = x^3$$

$$y = x + \frac{1}{x^2}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$$

$$y = \frac{1}{(x-3)^2}$$

$$y = \frac{1}{x^2}$$

$$y = 2 \cos x$$

$$y = -x^4 + 3x^2 + 2$$

۱۷۲- مطلوبست محاسبه سطح حادث مابین منحنی

و محور x'

۱۷۳- سطح حادث مابین منحنی $y = 12x - 2 \cos x$ و محور x' و عرضهای نقاط بطول $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ را حساب کنید

۱۸۴- منحنی $y = x + 2 \sin x$ را رسم نموده و سطح حادث مابین آن و محور x'

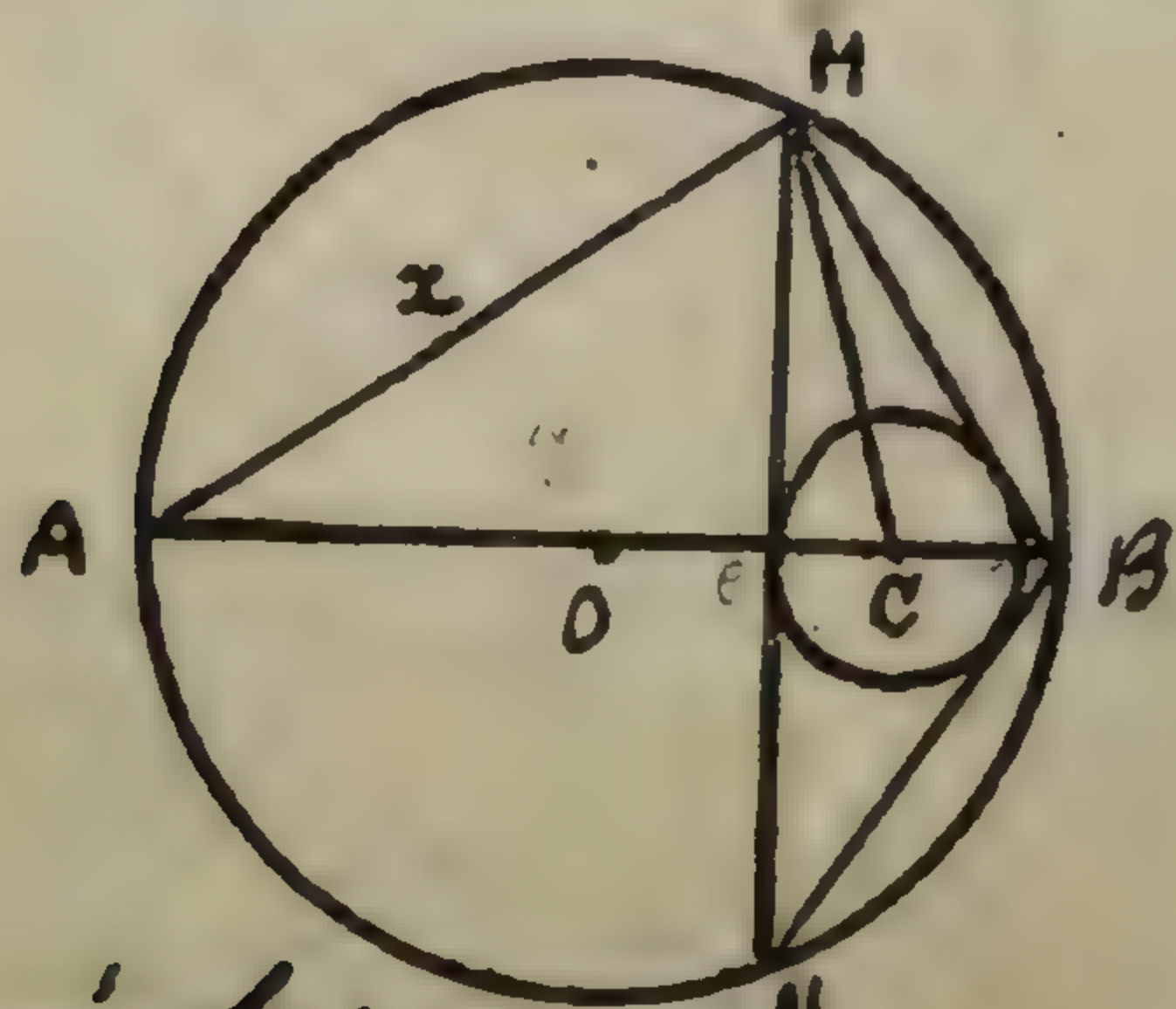
و عرض نقطه بطول π را حساب کنید

مسائلی که ذیلاً تنظیم و در دسترس محصلین گذارده میشود و بعضی از آنها را خود مؤلف طرح نموده
است اغلب مسائلی است که در امتحانات مختلفه داده شده برای مهیت نمودن محصلین و آماده ساختن
آنها برای امتحانات نهائی و مسابقه فوق العاده مفید است و بعد از آن در ذیل همین فصل مسائلی
را که در سنوات اخیر در امتحانات رسمی متوسطه مرکز و ولایات و همچنین در مسابقه داده
شده است یاد داشت مینماید

مسائل

۱۷۵- تابع $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$ مفروض است مطلوب است اولاً تقسیم مقادیر یابد و
دسته بر حسب شاخه های مینهایت منحنی ثانیاً مقادیر x را تعیین کنید که بازاء
آنها تابع ماکزیموم یا مینیموم باشد ثالثاً منحنی تغییرات تابع را بازاء $x = 2$ و $x = 0$
رسم کنید و اینها مقدار x را تعیین کنید بطریتی که کسوف فوق قابل تحویل باشد و در این
صورت منحنی آنرا نیز بازاء این مقدار x رسم کنید

۱۷۶- دایره بقطر $AB = 2R$ و نقطه H در ردی آن بفاصله $AH = x$



مفروض است وتر MN را بر AB

عمود نموده MB و NB را وصل

میکنیم مطلوب است اولاً محاسبه x

شعاع دایره محیطی مثلث MNB بر حسب R و x ثانیاً محاسبه nc

ثالثاً رسم جدول و منحنی تغییرات $y = \frac{nc}{R}$ هرگاه x تغییر نکند

۱۷۷- معادله $x^4 - ax^2 + b = 0$ که در آن a و b مختصات نقطه P و

در سطح دو محور می باشد مفروض است اولاً در عده ریشه های معادله فوق بر حسب وضع

نقطه P بحث نموده و تحقیق کنید که نقطه P در روی کدام خط MA باید باشد برای آنکه

معادله دارای دو ریشه مضاعف باشد ثانیاً ثابت کنید برای آنکه معادله دارای یک

جواب معلوم x باشد باید نقطه P بر روی خط MA مماس بر منحنی MA باشد ثانیاً

معلوم کنید که نقطه P در روی کدام خط باید باشد برای آنکه چهار جواب معادله فوق

تشکیل یک مضاعف عددی بدهند و در این صورت ریشه های a و b حساب کنید

۱۷۸- معادله درجه دوم

$$(1-t)x^2 + (3t-5)x + 4(2-t) = 0$$

مفروض است اولاً در وجود و علامت ریشه های آن بر حسب مقادیر t بحث کنید

ثانیاً در حالتی که دو ریشه مثبت باشند آنها را اضلاع قائمه یک مثلث قائم الزاویه

فرض میکنیم مطلوبیت محاسبه و تر این مثلث بر حسب t و رسم جدول و منحنی تغییرات

آن هرگاه t در حدود فوق تغییر کند ثالثاً مطلوبیت محاسبه شعاع دایره محاطه

مثلث فوق و تغییرات آن با شرائط فوق و همچنین محاسبه شعاع بر حسب وتر

۱۷۹- دایره c شعاع a و دایره c' شعاع a' که بعد مرکزین آنها

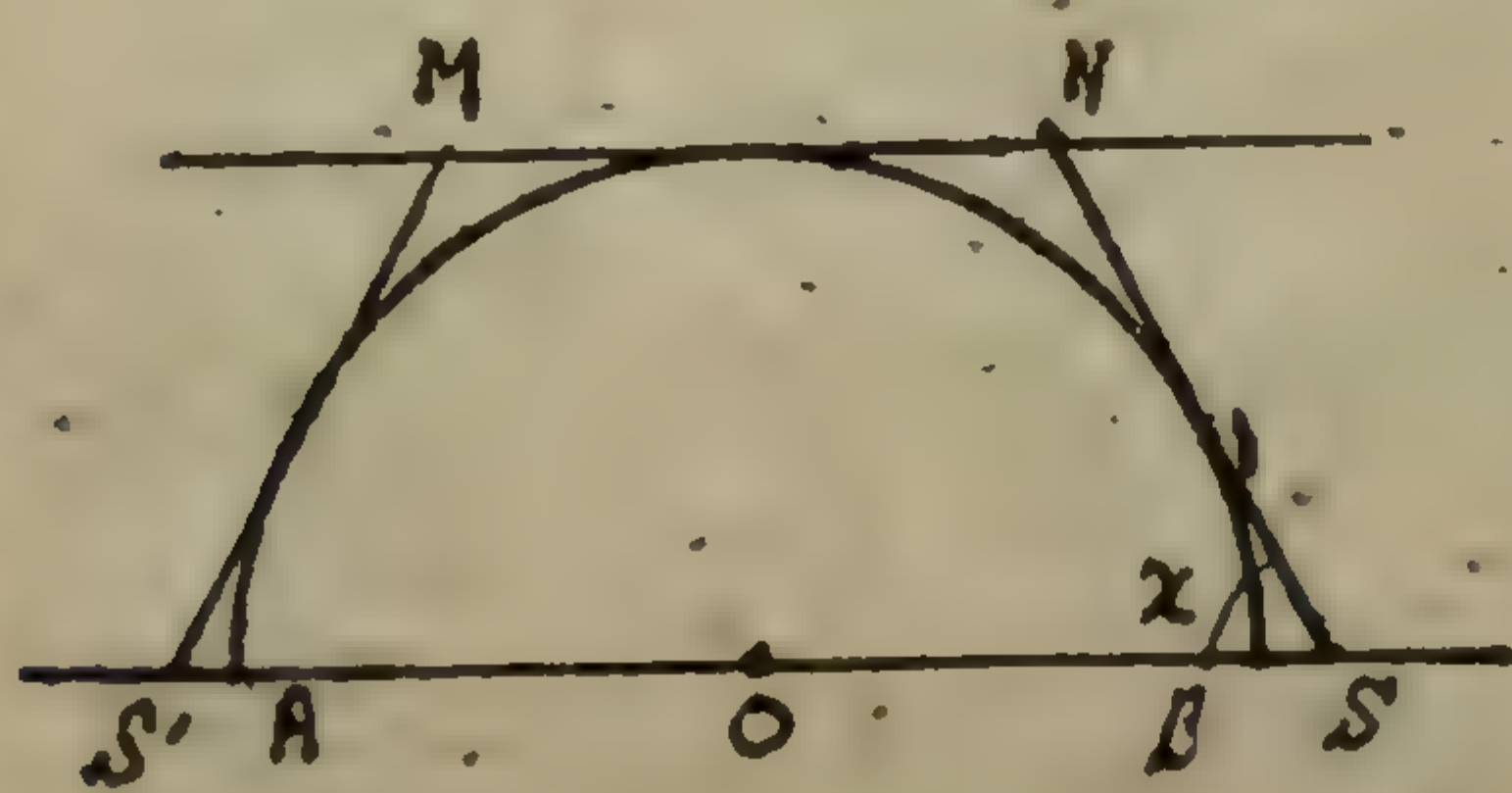
$cc' = v$ می باشد مفروض است مطلوبیت اولاً موضع نقطه O موقع محور اصلی دو

دایره ثانیاً خط مرکزین را استداویدیم و در روی آن نقطه O را مبدأ قرار داده

و جهت از O به C را جهت مثبت اختیار میکنیم حال نقطه مانند M در روی آن بفاصله
 $OM = x$ فرض میکنیم مطلوب است عبارت نسبت قوت نقطه M نسبت بدایره C
 و در رسم جدول و منحنی تغییرات آن هرگاه x جمیع مقادیر ممکنه را دارا گردد
 ثالثاً اوضاع نقطه M را تحقیق کنید که نظیر آنها نسبت فوق مساوی مقدار معلوم K باشد
 (بحث)

۱۸۰- دو محور قائم $x'Ox$ و $y'Oy$ و نقطه A در روی منصف الزاویه xOy
 بطول a و نقطه B در روی Oy بعرض b مفروض است فرض میکنیم a و b مثبت
 و مخالف صفر باشند حال اگر نقطه متغیری مانند M در روی Ox بطول مثبت x اختیار
 کنیم مطلوب است اولاً محاسبه زاویه \widehat{AMB} و \widehat{BMO} بر حسب x و شکل
 نسبت $y = \frac{\tan \widehat{BMO}}{\tan \widehat{AMB}}$ ثانیاً تغییرات y هرگاه M محور Ox را طی نماید ثالثاً
 مقدار x را بطریقی یقین کنید که \widehat{AMB} منصف زاویه OMA باشد (بحث)

۱۸۱- نیمدایره بشعاع R و مماس MN موازی قطر AB مفروض است از
 نقطه O در روی قطر طولهای OS و OS' را مساوی بیکدیگر جدا نموده از نقاط S و



S دو خط بر نیمدایره مماس میکنیم تا مماس

اول را دو نقاط M و N قطع نماید حال

فرض میکنیم $OS = x$ باشد مطلوب است

اولاً عبارت سطح حادث از دوران ذوزنقه در حول S ثانیاً یقین x بطریقی

که این سطح مسامی πa^2 باشد (بحث) ثالثاً مطلوبت تغییرات این
سطح هرگاه x از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ تغییر کند

۱۸۲- معادله درجه دوم

$$(1 + \sin^2 \varphi) x^2 - (1 + \sin^2 \varphi) x + \sin^2 \varphi (1 - \sin^2 \varphi) = 0$$

که در آن φ نمایش پاراتریت مفروض است اولاً مطلوبت تحقیق رابطه مابین
 x و φ ریشه های معادله فوق که بستگی بمقدار φ نداشته باشد ثابت مطلوبت
محاسبه φ که بازاء آن معادله دارای ریشه های مسامی باشد ثالثاً حاصل
ضرب دوریشه تابی است از φ مطلوبت رسم جدول و منحنی تغییرات آن هرگاه
(φ از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ تغییر کند)

۱۸۳- دو محور $x' O x$ و $y' O y$ عمود بر یکدیگر و نقطه A مختصات a و a
و نقطه M مختصات $\frac{a \cos \theta}{1 + \cos \theta}$ و $\frac{a \sin \theta}{1 + \cos \theta}$ که در آن θ نمایش مقدار

ثابت و زاویه مابین O و M میباشد مفروض است اولاً مطلوبت محاسبه m
ضرب زاویه خط AM و تغییرات آن هرگاه θ از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ تغییر کند ثانیاً
مطلوبت محاسبه θ بطریقی که $m = -1$ باشد ثالثاً مکان نقطه M را هرگاه
 θ تغییر کند معلوم نموده مطالب فوق را از روی آن تحقیق نماید

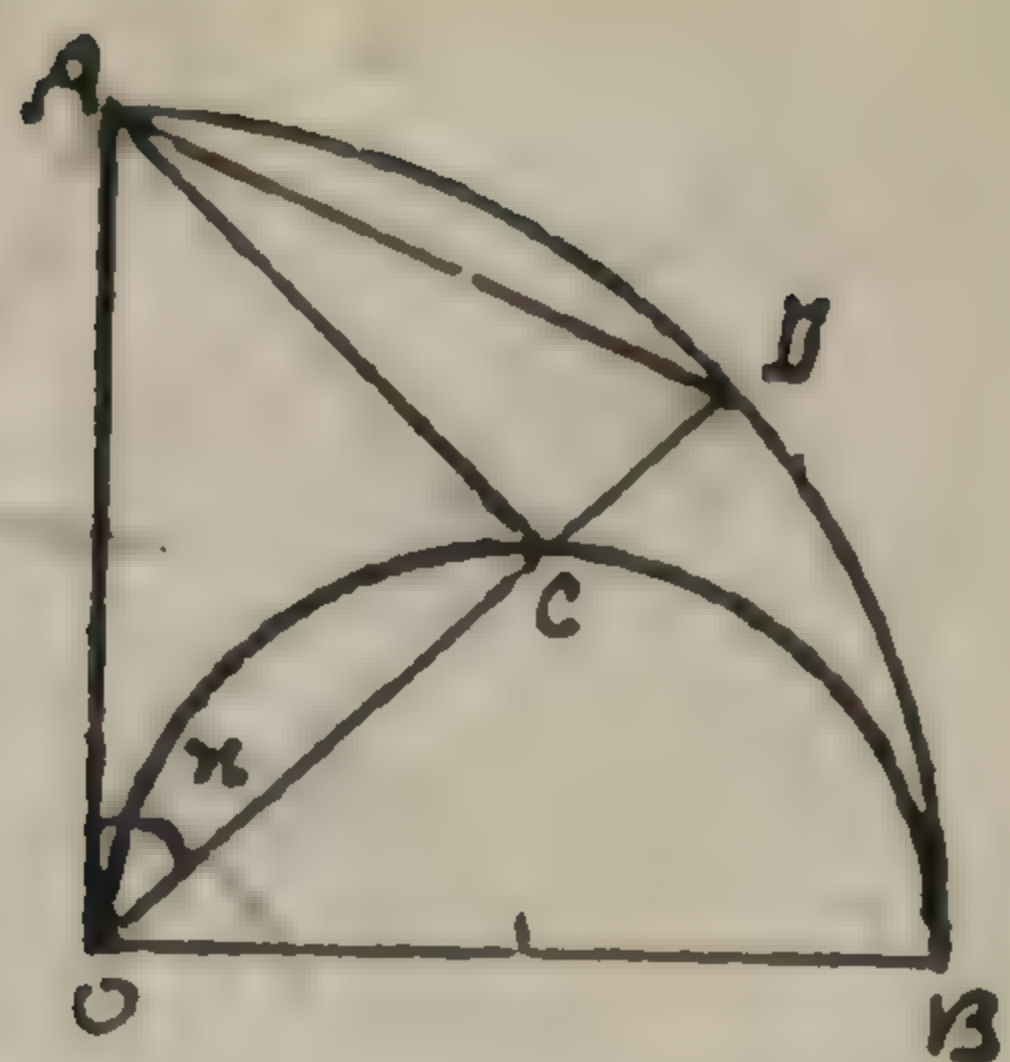
۱۸۴- ربع دایره شعاع R مفروض است OB را قطر قرار داده در داخل آن
نیم دایره رسم میکنیم شعاع OD را نیز رسم نموده و فرض میکنیم زاویه $AOB = \alpha$

باشد هرگاه شعاع مذکور نمدایره را در نقطه

c قطع کند مطلوب است اولاً محاسبه سطح

مثلث ACO بر حسب R و x و رسم

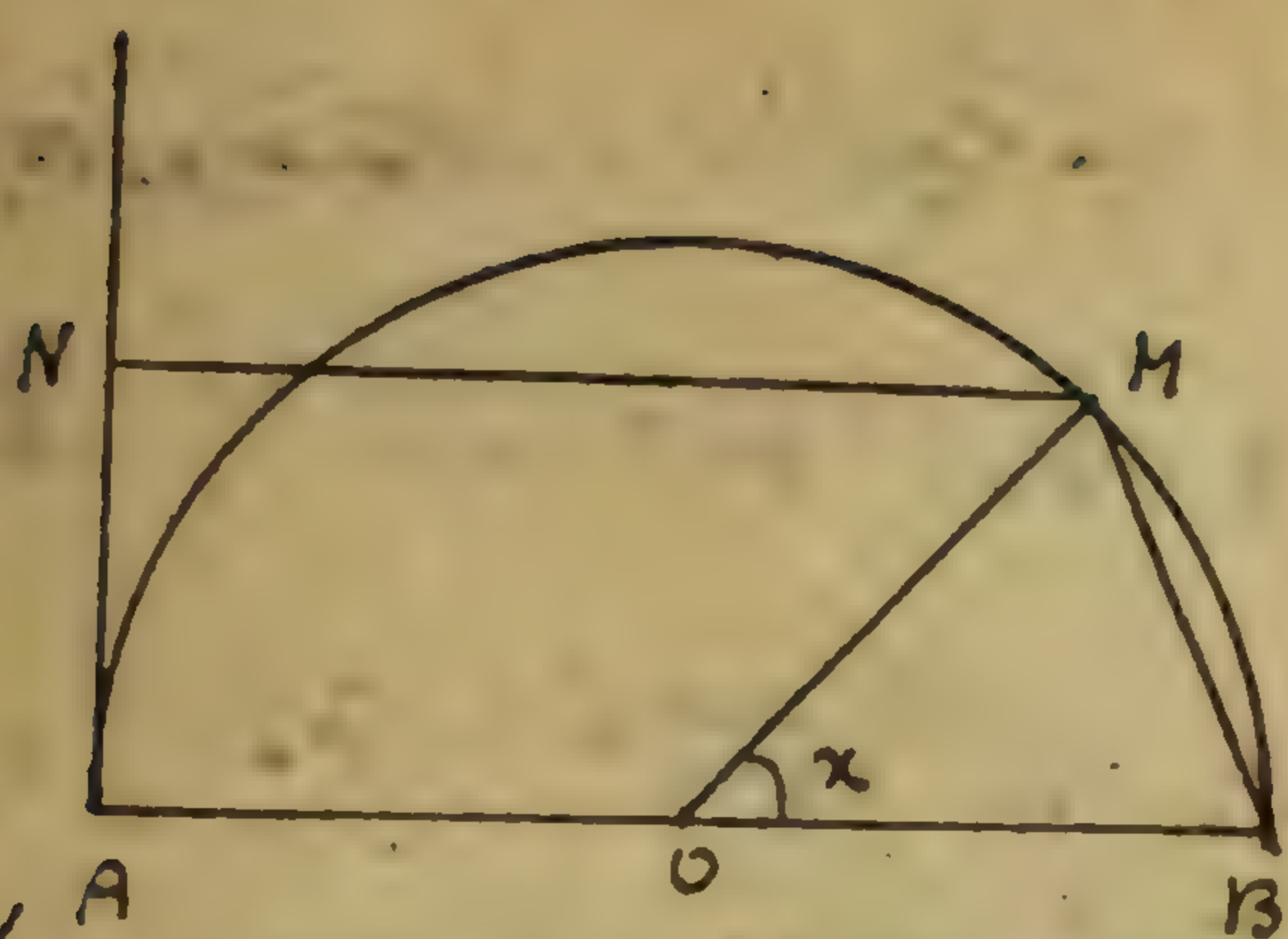
جدول دسختی تغییرات آن هرگاه x



تغییر کند ثانیاً مطلوب است محاسبه سطح حادث مابین منحنی فوق و محور x و ثانیاً در حالتی که $OC = m \cdot AB$ فرض شود مطلوب است محاسبه x و بحث در مسئله و همچنین تعیین مقدار عددی x در حالت خاصی که $m = \sqrt{3}$ باشد را بجا هرگاه $AC = AD$ فرض شود مطلوب است محاسبه x و اثبات آنکه دایره محیطیه مثلث AOC در نقطه A بر AB مماس میگردد

۱۸۵- تابع $y = \frac{x^3}{x^2 + mx + a^2}$ که در آن a مقدار مثبت معلوم و m نمایش پارامتریت مفروض است اولاً در اشکال منحنی فوق بر حسب مقادیر m بحث نماید ثانیاً نقطه A را در روی Ox بطول $OA = a$ و نقطه M را در روی منحنی بطول x اختیار میکنیم و فرض میکنیم P تصویر آن بر Oy باشد مطلوب است محاسبه حجم حادث از دو به آن دوزنقه OAMP در حول Oy بر حسب x و تغییر مقادیر منفی x ثالثاً مطلوب است تغییرات این حجم هرگاه M منحنی را طی نماید در حالتی که $m = -a$ و $m = 2a$ فرض شود

۱۸۶- نمدایره بقطر $AB = 2R$ و مماس بر نقطه A مفروض است نقطه مانند M در روی نمدایره فوق اختیار نموده و منحنی را طی میکنیم $M \rightarrow B = x$



باشد MB را وصل نموده و عمود

MN را بر ماس اخراج میکنیم

مطلوبت اولاً محاسبه $y = MB + MN$

بر حسب R و x در رسم جدول و منحنی تغییرات آن هرگاه x از 0 تا π تغییر کند

ثانیاً مطلوبت محاسبه سطح حادث مابین منحنی و محور $y'y$ و محور $x'x$ و اردنه

بطل π ثالثاً مطلوبت محاسبه x بطریقی که $MB + MN$ مساوی مقدار

معلوم m باشد (بحث) رابعاً بحث اخیر را با منحنی و جدول تغییرات y تطبیق

نمائید (مسئله ۱۹۹۶)

$$۱۸۷ - \text{توابع } y = \frac{3\alpha}{4} + (1-\beta)x^2 \text{ و } y = -\alpha x^2 + \beta - 1$$

مفروض است اولاً تعیین کنید چه رابطه مابین α و β باید موجود باشد تا آنکه منحنی نمایش

تغییرات دو تابع یکدیگر را بر او یک قائمه قطع کنند و بفرض آنکه $\alpha = 1$ باشد β را حساب کنید

ثانیاً منحنی تغییرات دو تابع را با $\alpha = 1$ و $\beta = 2$ رسم کنید ثالثاً سطح محصور مابین دو

منحنی فوق را حساب کنید رابعاً در سطح دو محور نقطه تعیین کنید که اگر از آن نقطه نقاط

تقاطع دو منحنی فوق وصل کنیم خطوط واصل بر ترتیب با جهت مثبت محور x و y از ایامی 0 و

30 احداث نمایند خامساً اگر محور x را بر محل تقاطع دو منحنی بگذارد و عمود بر محور y باشد

معادلات جدید دو منحنی را بنویسید سادساً جدول و منحنی تغییرات $\frac{y}{x} = \frac{y}{x}$ را

رسم نموده و نقطه از منحنی را معلوم کنید که ماس بر آن با خط $y - 20x = 0$ موازی

باشد و علاوه مساوی ماس را تعیین کنید

۱۸۸- تابع $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ مفروض است مطلوب است اولاً تعیین

ضرائب a و b و c و d بطریقی که تابع y در نقاط M بمقتضات ۱ و ۲ و ۳ و ۴

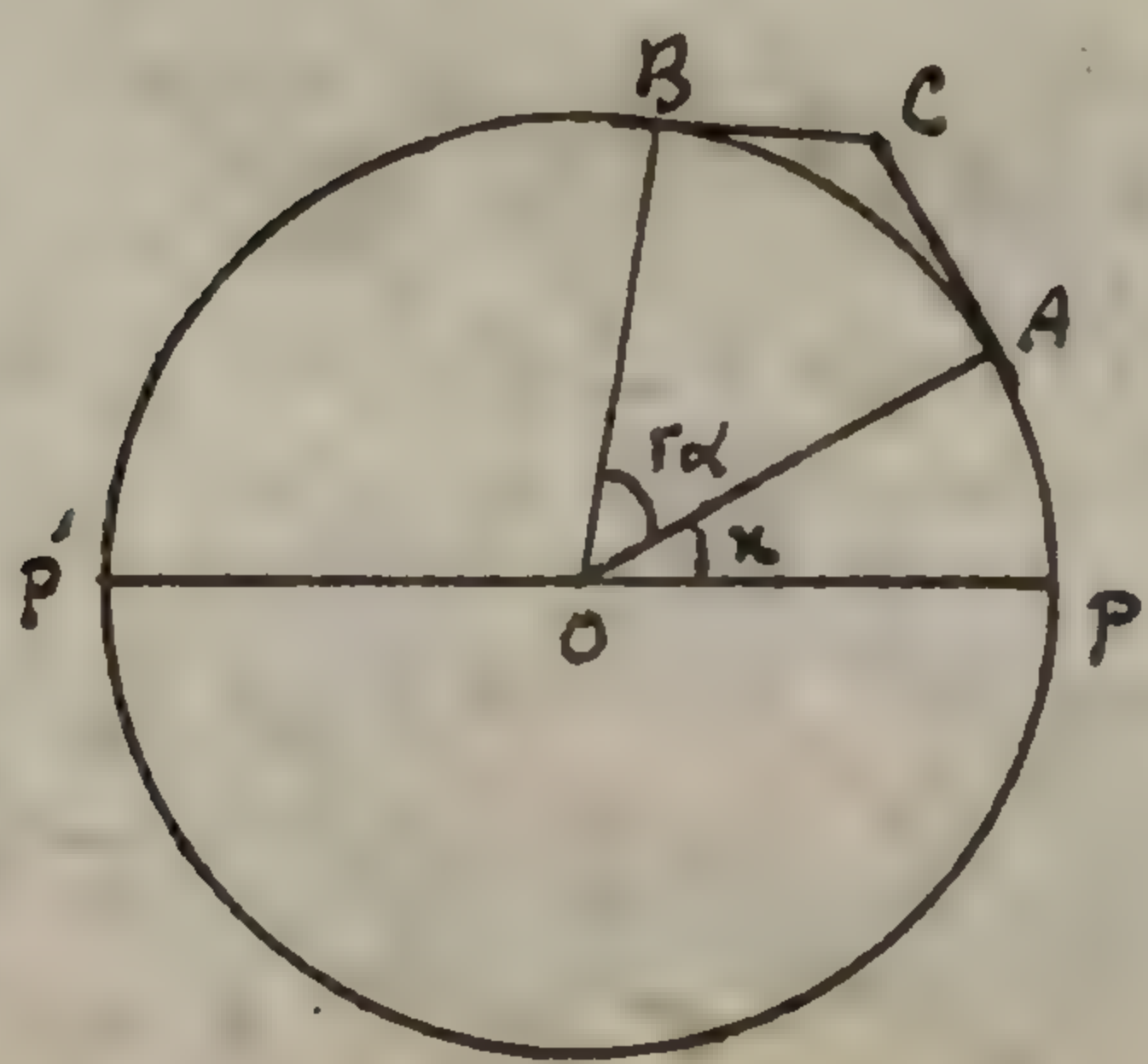
بمقتضات ۲ و ۳ - برترتیب ماکزیموم و مینیموم باشد ثانیاً جدول و منحنی تغییرات

تابع را با زاویه این مقادیر a و b و c و d رسم کنید ثالثاً در ریشه های مساوی

$x^3 - 4x^2 + 9x - 20 = 0$ از روی منحنی فوق بحث نماید را بنام سطح حادث مابین

منحنی و محور $x'x$ و عرضهای نقاط بطول ۵ و ۳ را حساب کنید

۱۸۹- دایره شعاع R و دو شعاع OA و OB که با یکدیگر زاویه 2α تشکیل میدهند



مفروض است ماسهای مرسوم از A و B

در نقطه C یکدیگر را قطع میکنند مثل را در حول

قطر PP' که در خارج زاویه AOB

اختیار میشود دوران میدهم مطلوب است

اولاً محاسبه V حجم حادث از دوران چهارضلعی $OACB$ بر حسب R و α

و زاویه حادثه $AOP = x$ ثانیاً حجم V_1 حادث از دوران قطاع دایره OAB

را حساب کنید و تحقیق کنید که نسبت $\frac{V}{V_1}$ ثابت و بستگی به x ندارد ثالثاً

α را حساب کنید بطریقی که نسبت فوق مساوی m باشد (بحث)

۱۹۰- سهمی برأس S و کانون F را اختیار نموده و فرض میکنیم $SF = \frac{7}{4}$

باشد نقطه مانند M در روی سهمی فوق فرض میکنیم مطلوبت اولاً تغییرات $\frac{MS'}{MF'}$ و میسبیه ماکزیموم آن ثانیاً رسم منحنی این تغییرات ثالثاً از روی منحنی فوق معلوم کنید چند نقطه M در روی سهمی یافت میشود که نظیر آنها نسبت فوق مساوی مقدار معلوم K باشد

۱۹۱- خط Δ بمعادله $y = \frac{a}{x} (1 - \frac{x}{b})$ که در آن a نمایش پارامتر است

مفروض است اولاً ثابت کنید که این خط همواره با منحنی ثابتی که معادله آن بصورت

$$y = \frac{a}{bx}$$

و محققات m نقطه تماس را بر حسب t تعیین نماید ثانیاً فرض میکنیم خط Δ

محور $x'x$ را در نقطه A و محور $y'y$ را در نقطه B قطع کند ثابت کنید که سطح مثلث

$$OAB$$

مقداریت ثابت ثالثاً نسبت $\frac{AB}{AT}$ را حساب نموده و نتیجه را بوجه

هندسی بیان نماید رابعاً مطلوبت رسم جدول و منحنی تغییرات تابع $z = AB$

بر حسب t و تعیین نقطه تماس خط Δ با منحنی c نظیر مینوم این تابع

$$192- \text{اولاً جدول و منحنی تغییرات تابع } y = \frac{x^3}{3} + 2x \text{ را رسم کنید}$$

و نقاط فصل مشترک منحنی را با محور $x'x$ تعیین نموده ماسهای رسومه از این نقاط را نیز

معلوم نماید ثانیاً منحنی را با خط مار بر نقطه A بمحطات 30° و 60° $y = \sin(x)$

قطع میکنیم در عده نقاط تقاطع این خط با منحنی غیر از نقطه A بحث کنید و معادله مکان نقطه

M وسط BC را تعیین نموده آنرا رسم کنید رابعاً سطح حادث مابین منحنی و محور $x'x$

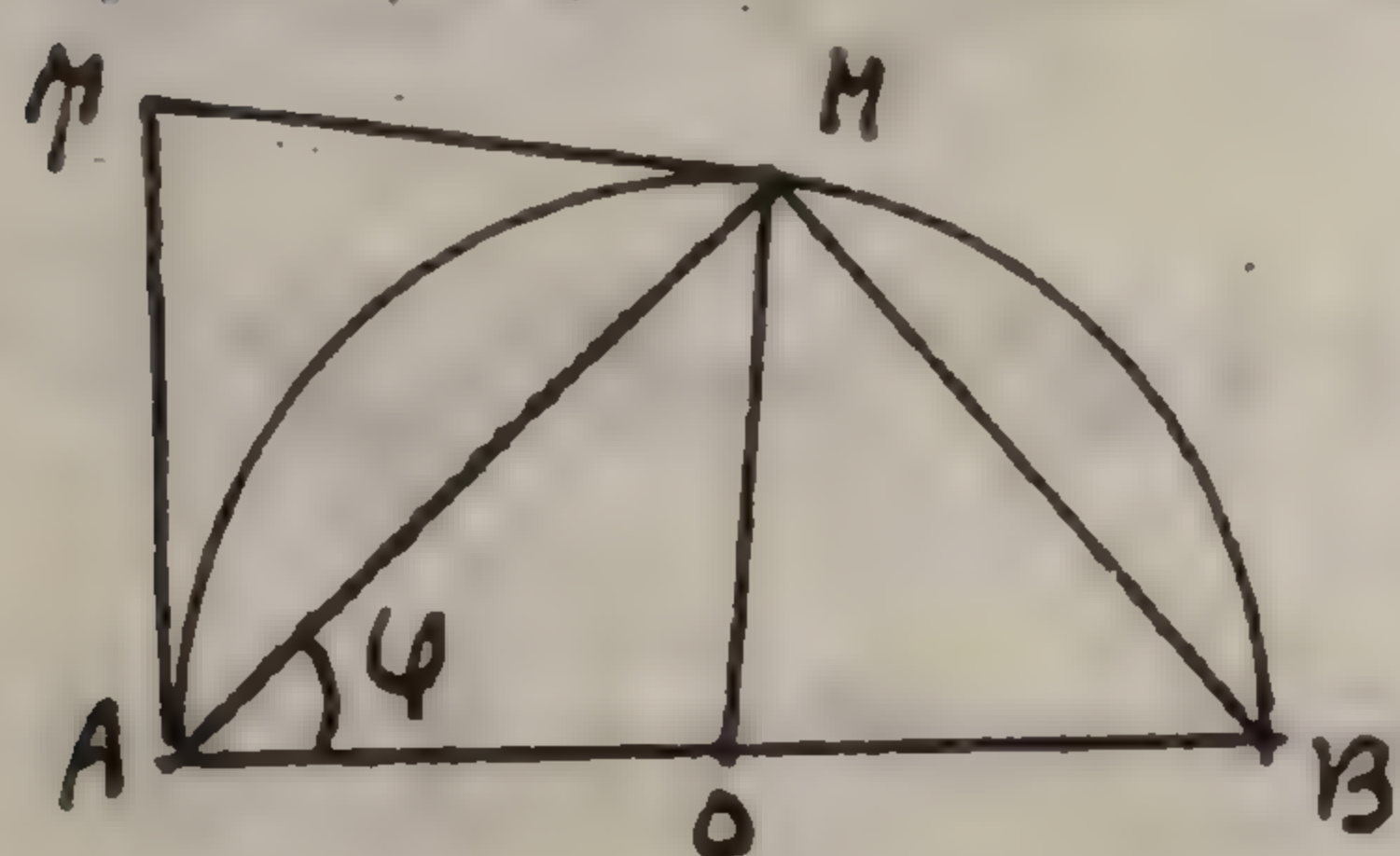
و عرضهای نقاط بطول ۵ و ۳ را حساب کنید

+ ۱۹۳ - در روی دایره مرکز O و شعاع واحد دو نقطه O و O' را که قوس مابین آنها $\frac{\pi}{2}$ میباشد فرض میکنیم از نقطه مانند M در روی نیمدایره $OO'A$ عمود MP را بر OC و MN را بر OC احداث نموده جهت از O به O' را جهت مثبت و قوس OM را x و قوس ON را y فرض میکنیم مطلوب است اولاً تحقیق رابطه مابین x و y و محاسبه محیط مثلث MNP بوسیله x و y ثانیاً مطلوب است تعیین M بطریقی که مجموع طولهای MP و MN مساوی ℓ باشد (بحث) همچنین تغییرات مجموع فوق را هرگاه M نیمدایره $OO'A$ را طی نماید معلوم کنید (محاسبه عددی x هرگاه $\ell = ۱,۸$) باشد ثالثاً تحقیق کنید که منصف زوایای داخلی و خارجی زوایای N و P در مثلث MNP بر نقطه ثابتی مرور مینمایند و همچنین مکان هندسی مراکز دوایر محیطه داخل و خارج را در زاویه M معلوم کنید.

+ ۱۹۴ - مثلث ABC که در آن زاویه A قائمه و زاویه B و وتر $BC = a$ معلوم است مفروض است فرض میکنیم $\angle A$ متغیر باشد نسبت وتر BC و نقطه I وسط AC باشد مطلوب است محاسبه همتا زوایای \widehat{ADI} و \widehat{AID} و محاسبه این زوایا به هرگاه

$B = 60^\circ$ باشد ثانیاً هرگاه B ثابت و زاویه A قائمه و زاویه B تغییر کند مطلوبت تغییرات DI هرگاه $\sin B = x$ باشد و همچنین رسم مثلث ABC نظیر ماکزیموم DI

۱۹۵ - نمدایره بقطر $AB = 2R$ مفروض است از نقطه A وتر AM را



رسم نموده و فرض میکنیم زاویه $BAP = \varphi$

باشد از نقاط A و M دو مماس رسم

میکنیم تا یکدیگر را در نقطه P قطع کنند

و بعد دوره حادثه باین مماس AP و MP و قوس MB را در حول قطر AB

دوران میدهدیم مطلوبت اولاً محاسبه سطح حادث بر حسب φ و ثانیاً رسم

جدول و منحنی تغییرات این سطح هرگاه φ متغیر کند (متغیر را $u = 1 - \varphi$ اختیار

کنید) ثالثاً تغییرات حجم محدود سطح فوق را معلوم کنید

۱۹۶ - دو تابع $y = x(x-3)(x+1)$

و $z = 1 - x(x-3)$

مفروض است اولاً ثابت کنید که هرگاه c و e دو منحنی نمایش تغییرات آنها را

نسبت یکدیگر استگاه محققات رسم کنیم دو منحنی در یک نقطه ثابت m بر یکدیگر مماس

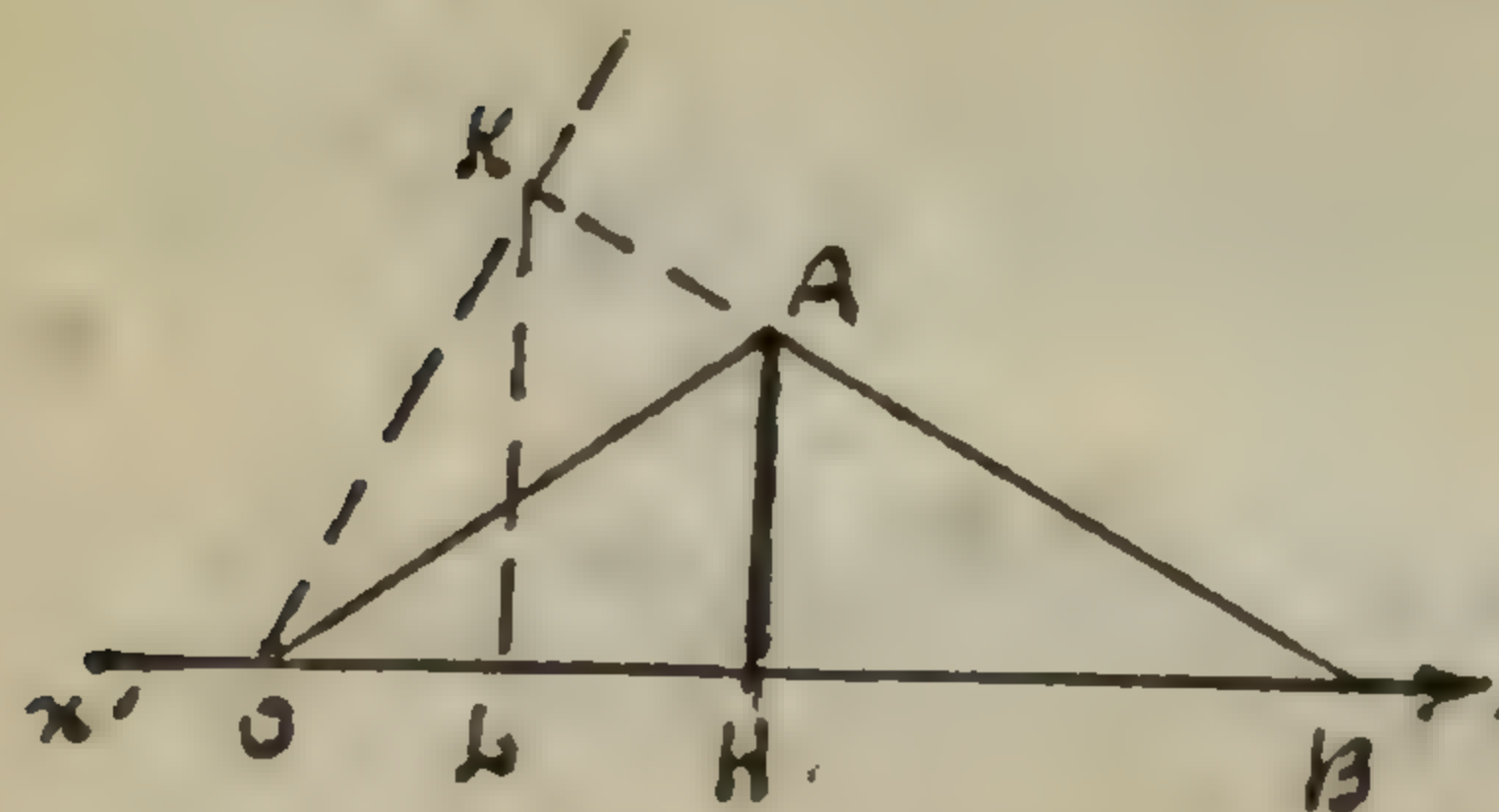
و در یک نقطه ثابت A یکدیگر را قطع میکنند ثانیاً ثابت کنید که مستدار سطح محدود باین

دو منحنی در فاصله AP مقدار ثابت ثابت ثانیاً فرض میکنیم m' و m'' ضریب زاویه
ماس بر دو منحنی در نقطه A باشد ثابت کند که $m' - m''$ مساوی مقدار ثابتی
میشود و در حساب کنید بطریقی که هرگاه γ زاویه دو منحنی در نقطه A باشد $\gamma = 90^\circ$
باشد را بجا تحقیق کنید که منحنی e نمایش تغییرات y محور x را در سه نقطه متوالی
 A و O و B تقاطع مینماید و مطلوبیت مقدار x بطریقی که مقدار جبری سطح حادث
مابین منحنی و محور x را و عرض نقاط A و B مساوی صفر باشد خامساً جدول و منحنی
تغییرات تابع y و x را با $z = \pm 3$ رسم نمایند

+ ۱۹۷ - محور x و OH و مثلث $OA H$ که در زاویه H قائمه و ضلع آن OH

شکل بر x میباشد مفروض است

هرگاه $OA = a$ و $OH = h$



و نقطه B نقطه متغیری در روی OA با فاصله $OB = x$

باشد مطلوبیت اولاً محاسبه

عبارت $y = \frac{AB'}{OB \times HB}$ بر حسب a و h و x ثانیاً رسم جدول و منحنی

تغییرات آن هرگاه B خط x را طی کند (برای تغییرات فوق $h=1$ و $a=\sqrt{5}$)

فرض میشود (ثانیاً هرگاه K موقع عمود وارد از O بر AB و M موقع

عمود وارد از K بر OA باشد تحقیق کنید که $y = \frac{HA}{LK}$ خواهد بود و باین

وسیله موضع نقطه B را در حالت ماکزیموم و مینیموم y رسم کنید و نتایج ثانیاً را بطور

هندسی تحقیق نمایند

+ ۱۹۸ - تابع $y = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$ مفروض است اولاً مطلوبست محاسبه مقادیر

a و b بطریقیکه هرگاه x از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند y همواره محصور باین 0 و 1 باشد

ثانیاً هرگاه $a = 4$ و $b = 4$ فرض شود جدول و منحنی تغییرات تابع را رسم کنید

ثالثاً نقطه A را در روی محور $y'y$ بغرض واحد اختیار نموده و فرض میکنیم نقطه M مانند

B در روی دایره مرکز A و شعاع واحد از مبدأ O با سرعت زاویه ثابت

$\omega = 1$ حرکت نماید هرگاه AB محور $x'x$ را در نقطه H قطع کند و فرض کنیم

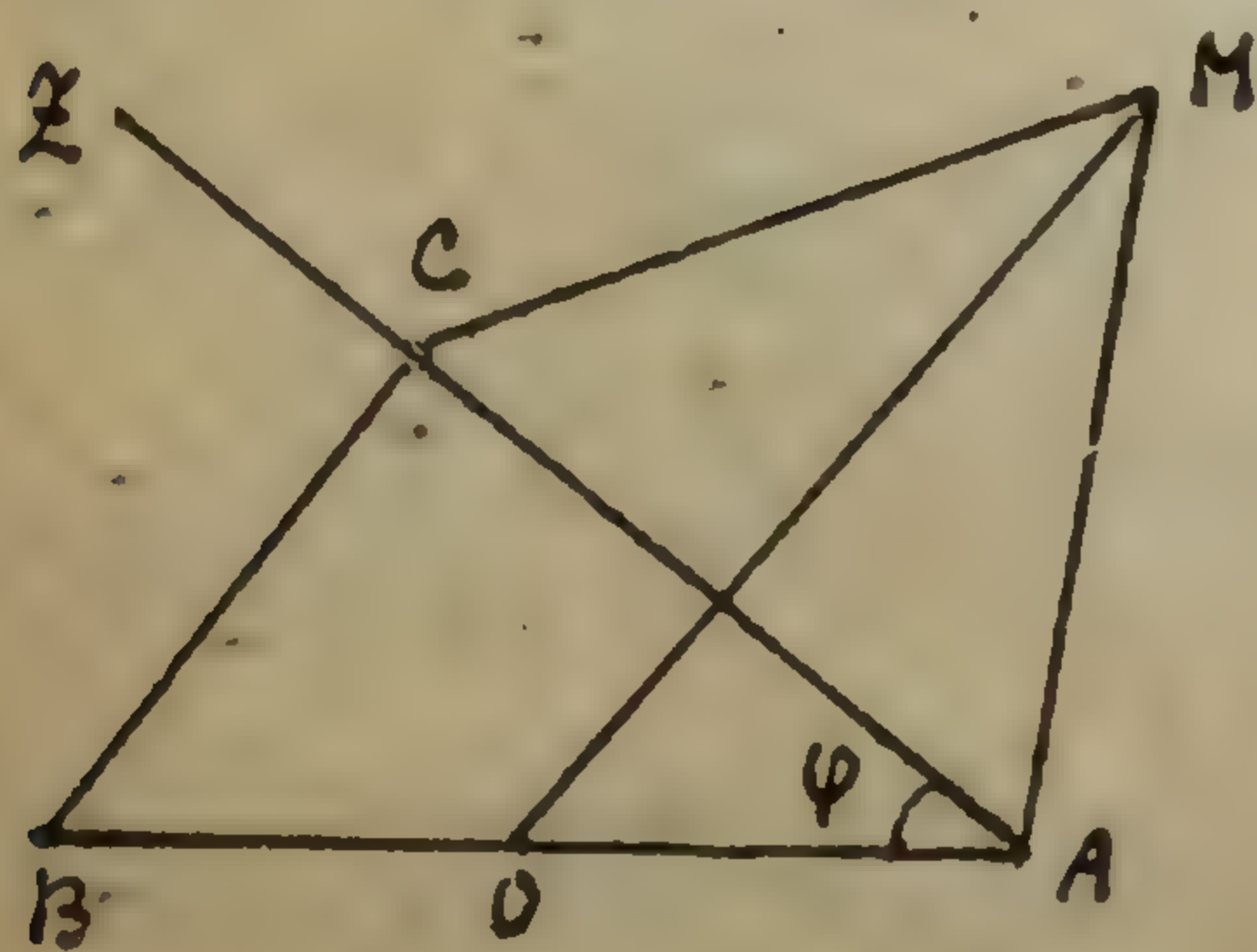
K نقطه از منحنی بطول OH و Q تصویر K بر $y'y$ باشد ثابت کنید که نقطه Q

در روی $y'y$ دارای حرکت نوسانی خواهد بود که معادله آنرا تعیین مینمایند رابعاً

دیگرام حرکت فوق را رسم نموده و سطح حادث باین منحنی و محور $y'y$ و $x'x$ و

عرض نقطه ماکزیموم منحنی را حساب کنید

+ ۱۹۹ - دو نقطه ثابت A و B و فاصله $AB = 2a$ و نقطه O وسط آن مفروض



است از نقطه A نیم خط AX را رسم

میکنیم و فرض میکنیم زاویه حاده $\angle XAB = \varphi$

باشد نقطه B را بر روی AX تصویر

نموده و در روی AC و در خارج مثلث ABC مثلث متساوی الاضلاع ACM

رابنا میکنیم مطلوبست اولاً محاسبه $\varphi = OM$ بر حسب a و φ در رسم جدول

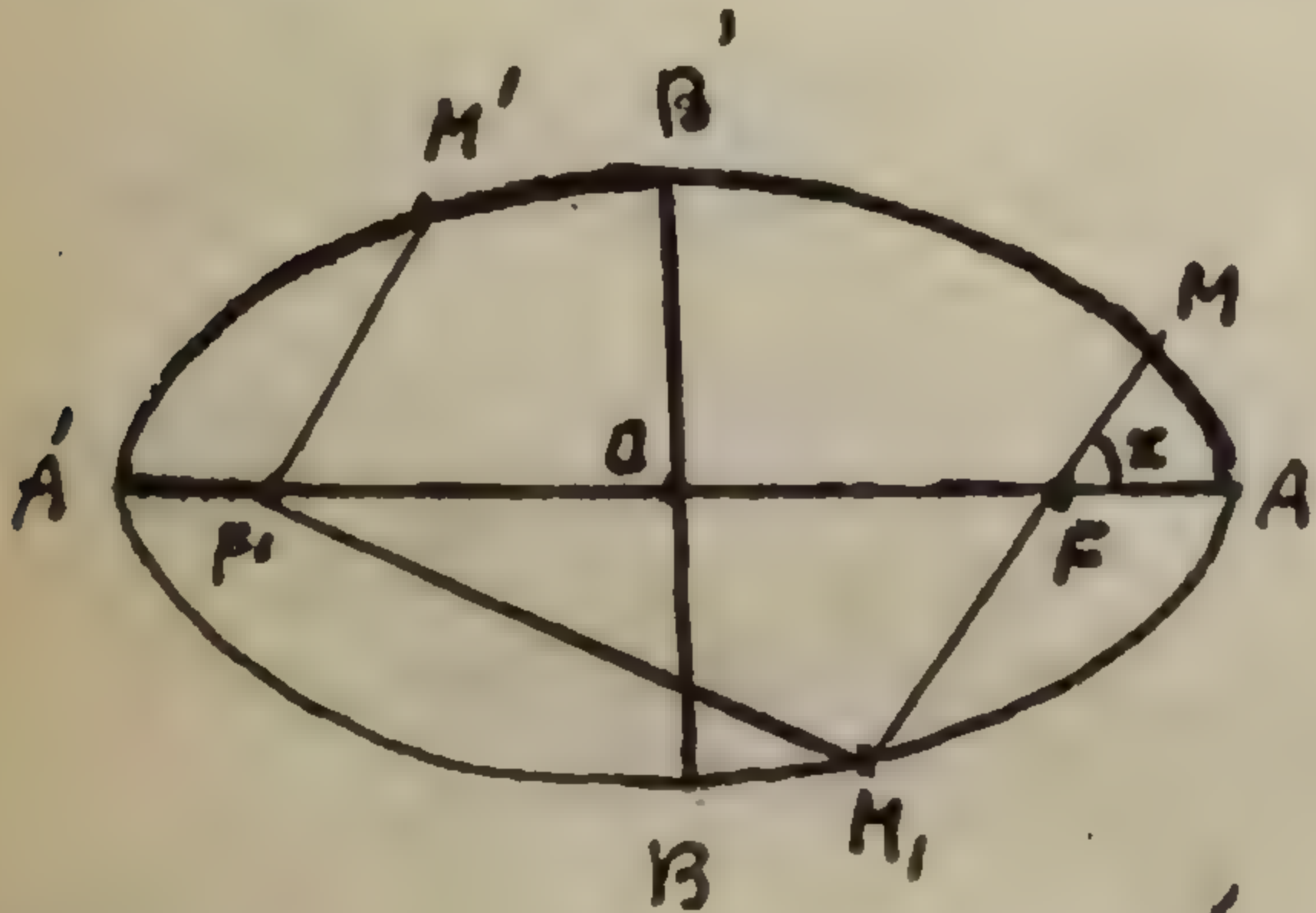
منحنی تغییرات آن هرگاه φ از φ تا φ تغییر کند ثانیاً φ را به سبب تعیین
کنید که φ مساوی φ باشد (بحث) ثالثاً بحث اخیر را از روی منحنی تغییرات
تابع نتیجه بگیرید

+ ۲۰۰ - عبارت $[a(1-x) - x^2] + (x^2 + \frac{1}{x}) = a$ که در آن x و
در متغیر a مقداریت معلوم مفروض است هرگاه a ثابت فرض شود مطلوب
تغییرات a در رسم منحنی آن ثانیاً بازار بعضی مقادیر a دارای یک
ماکزیموم و دو مینیموم می باشد مطلوبست تنظیم این مقادیر a و تعیین حالتیکه دو مقدار
از اینها مساوی باشند

+ ۲۰۱ - تابع $y = \frac{ax+1}{x^2-1}$ که بازار هر مقدار a دارای یک
منحنی نظیر است مفروض است اولاً ثابت کنید که منحنیات مزبوره یکی بر نقطه ثابتی
مروارید نمایند همچنین منحنی تغییرات تابع را بازار مقادیری از a رسم کنید که ماس
بر منحنی در نقطه ثابت فوق با خط $4x + 5y = 0$ موازی باشد ثانیاً خط Δ
موازی $x'x$ منحنی اخیر را در دو نقطه مانند M' و M'' و محور $y'y$ را در نقطه P
قطع نمایند هرگاه فرض کنیم که نقطه M مزدوج توافقی P نسبت به نقطه H و H'
باشد مطلوبست رابطه مابین مختصات M و مکان هندسی آن هرگاه Δ موازی
خود تغییر کند ثالثاً هرگاه φ یکی از منحنیات تابع مفروض و نقطه H_1 و H_2
نقاط ماکزیموم و مینیموم باشد ثابت کنید که مختصات x_1 و y_1 و x_2 و y_2

نقاط M_1 و M_2 در روابط ذیل صدق نمایند $x_1 x_2 = 1$ $y_1 + y_2 = -1$
 و ازیراه بفرض آنکه یکی از نقاط M_1 و M_2 درست باشد طریقه هندسی برای رسم نقطه
 دیگر بدست آورید را بجا هرگاه فرض کنیم نقطه M_1 نقطه از منحنی مختصات x_1 و y_1 باشد
 از روابط فوق نقطه گمراهی مانند M_2 نظیر آن بدست آورده و فرض کنید نقطه M_2
 خط $y_1 = x_1$ را طی نماید در اینصورت رابطه مابین x_2 و y_2 بدست آورده و مکان
 نقطه M_2 را تعیین نماید

۲۰۲ - بیضی بقطر طول $2a$ و قطر اقصی $2b$ و فاصله کانونی c مفروض است
 از نقطه F وتر MM_1 را بطریقی رسم میکنیم که با FF' زاویه x تشکیل دهد و از

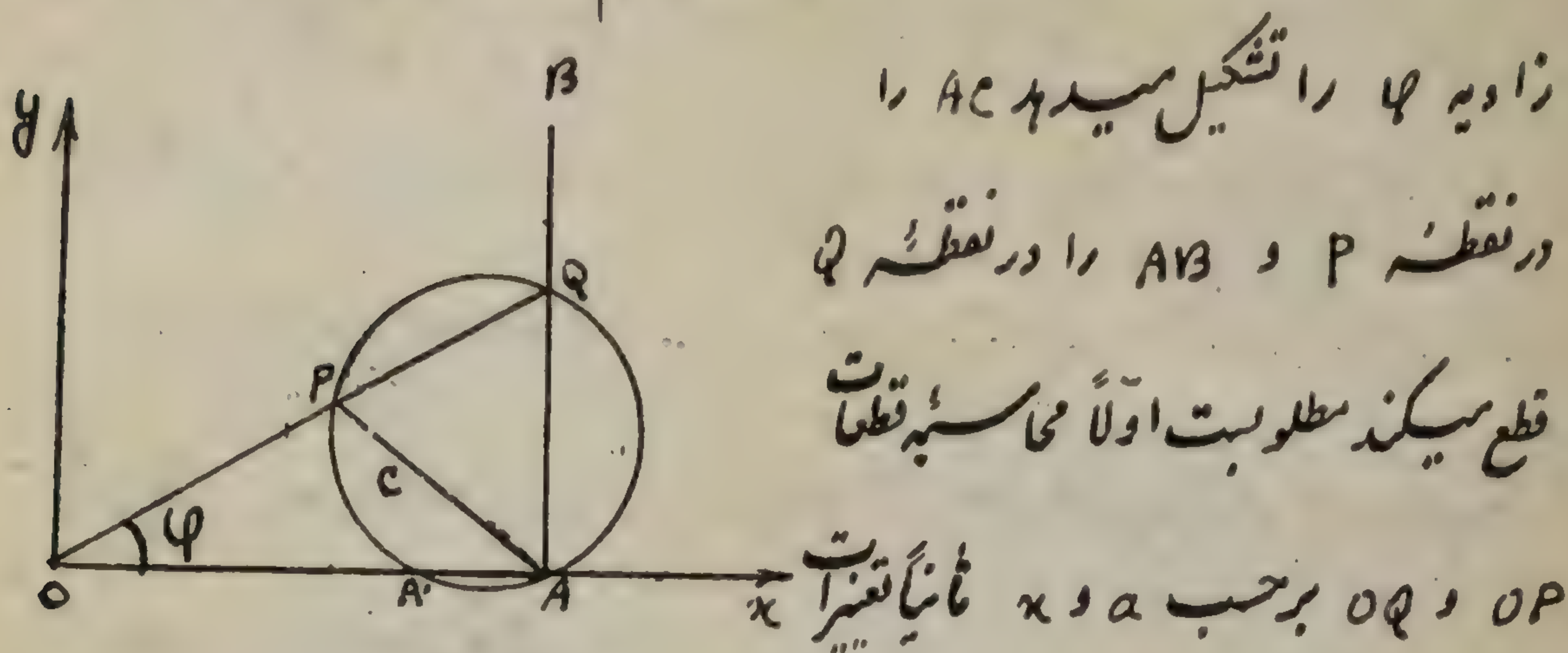


کانون F' شعاع حامل $F'M'$ را
 موازی با آن رسم میکنیم مطلوبت
 اولاً محاسبه سطح مثلث $F'MM_1$

بر حسب a و b و c و x ثانیاً هرگاه فرض کنیم $a' = b'$ باشد مطلوبت
 رسم جدول و منحنی تغییرات $y = \frac{S}{b' \sqrt{b}}$ هرگاه x از ۰ تا π تغییر کند
 ثالثاً هرگاه P نقطه تقاطع مماسهای مرسومه از M و M' باشد تحقیق کنید که خط OP
 موازی MM_1 خواهد بود همچنین مطلوبت مکان نقطه P هرگاه x تغییر کند

۲۰۳ - زاویه قائمه $x \perp y$ و نقطه A در روی OX مفروض است
 بطریقی که $OA = a$ میباشد عمود AB را بر OX احداث نموده خط

AC منصف الزاویه OAB داریم می‌کنیم خط غیر مشخص تا بر O که با α و



زاویه φ را تشکیل میدهد AC را

در نقطه P و Q و AB را در نقطه Q

قطع میکند مطلوبت اولاً محاسبه قطعات

OP و OQ بر حسب α و φ ثانیاً تغییرات $OP \times OQ$ هرگاه φ از α تا π تغییر کند ثالثاً دایره محیطیه مثلث OPQ, APQ

را در نقطه دیگر A' قطع میکند مطلوبت مینوم OA'

۲-۴ - دو دایره \odot و \odot' بر مرکز O و O' داشته باشند α و α' ($\alpha' < \alpha$)

در نقطه M مماس خارج می‌باشند فرض میکنیم A و A' و B و B' نقاط تقاطع هر یک

از دو دایره با مماس خارجشان بوده و محل تقاطع مماس مشترک داخل و مماس

مشترک خارج AA' باشد زاویه $\angle AOM$ را مساوی α فرض میکنیم مطلوبت

اولاً محاسبه شعاع دایره \odot بر حسب α و α' ثانیاً طول قطعه PM هرگاه

P محل تقاطع خط MB با مماس مشترک خارج AA' باشد و ثابت کنید که اگر $\alpha = 1$

$AA = x$ باشد $MP = \frac{x^2}{x^2 - 4}$ خواهد بود ثالثاً مطلوبت رسم

جدول و منحنی تغییرات تابع جبری $y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$ هرگاه x از 0 تا $+\infty$

تغییر کند

۲-۵ - مربع $OABC$ بقطع واحد نقطه M در روی OA و OB و

A مفروض است عمود بر سوره از B بر BM استداد و OA و OC را در نقاط P و Q قطع میکند فرض میکنیم $OM = x$ و $OP = y$ و $OQ = z$ باشد

اولاً ثابت کنید که $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ و $x + y = z + xy$ میباشد

و از این وسطوبست محاسبه y و z و MP بر حسب x ثانیاً تغییرات y را بر حسب x معلوم کنید هرگاه M طول OA را طی نماید ثالثاً M را تعیین کنید بطریقی که حجم حادث از دوران مثلث APB در حول MP مساوی $\frac{1}{3}\pi$ باشد (بحث)

۲۰۶- مثلث قائم الزاویه و متساوی الساقین ABC که در آن $AB = AC = b$

میباشد مفروض است ضلع AC را بقدر $CD = b$ استداد داده و در روی وتر BC نقطه متغیری مانند M فرض میکنیم و بعد MP را بر AB عمود کرده و فرض

میکنیم $AP = x$ باشد اولاً مطلوبت محاسبه $\angle MPD$

بر حسب b و x در رسم جدول و منحنی تغییرات آن هرگاه x از 0 تا b تغییر کند

ثانیاً محاسبه مقدار x بطریقی که زاویه فوق ناگزیر میوم باشد و همچنین مطلوبت $\angle MPD$

زاویه ناگزیر میوم

۲۰۷- اولاً جدول و منحنی تغییرات تابع $y = x + \frac{4}{x^2}$ را رسم کنید

ثانیاً تحقیق کنید که تابعی بصورت $F(x) = ax^2 + b + \frac{c}{x}$ یافت میشود

بطریقی که مشتق آن تابع مفروض باشد ثالثاً هرگاه نقطه A نقطه از منحنی بطول r باشد

مطلوبت سطح حادث باین منحنی و مجانب آن و عرض نقاط بطول r و $2r$ را تحقیق

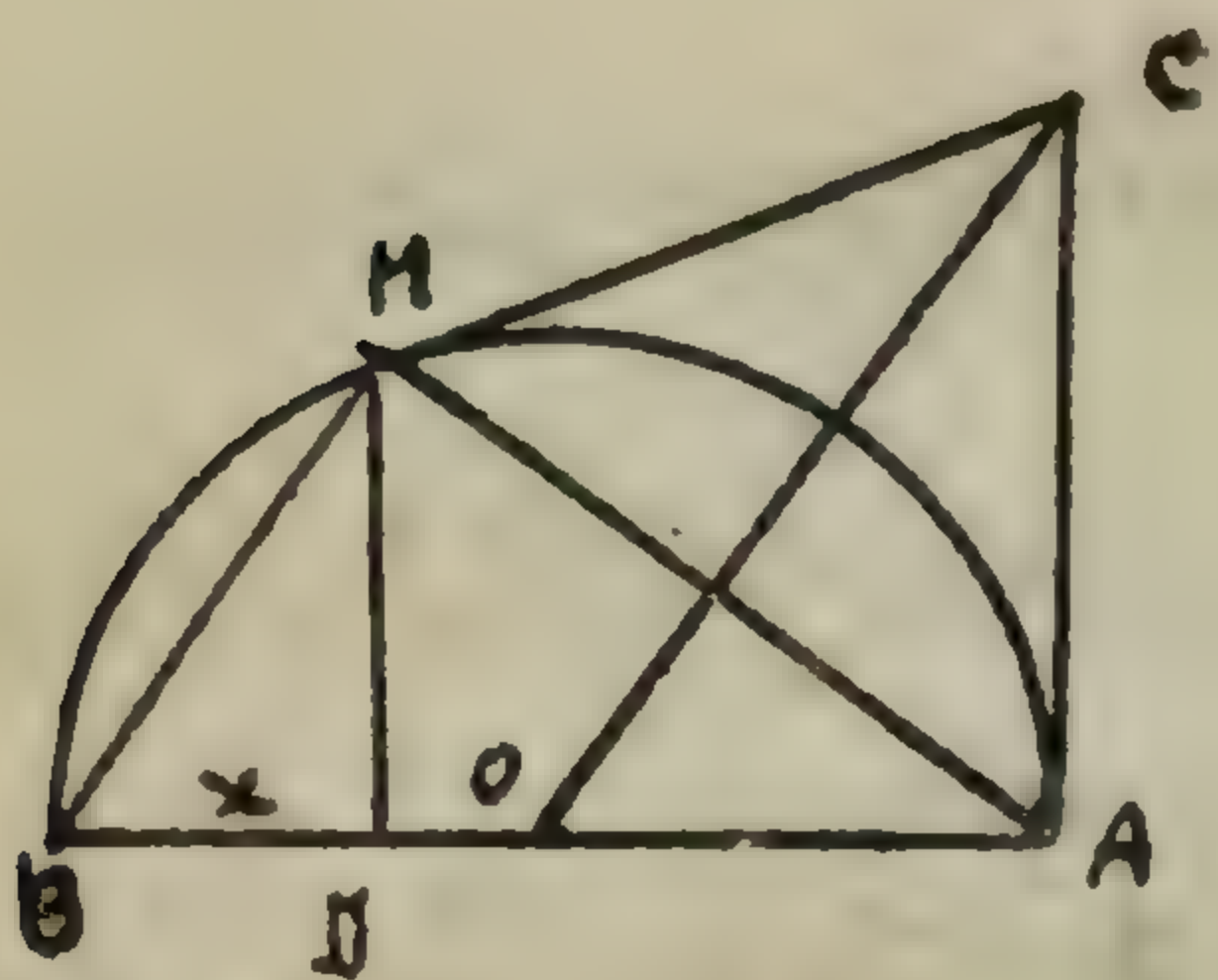
آنکه آیا این سطح هرگاه در میل کند بجهت ∞ دارای حدی می باشد یا خیر را بجا
ماس بر منحنی در نقطه مینویسم منحنی را در نقطه دیگری ۱۳ قطع میکند مطلوب است محققات آن و ضرب
زاویه ماس بر منحنی در نقطه ۱۳

۲۰۸- نیمدایره بقطر $AB = 2R$ مفروض است از نقطه M خط MD را بر قطر

AB عمود نموده و فرض میکنیم $BD = x$

باشد بعد از نقاط A و M دو خط بران

ماں سکینم تا در نقطہ ۷ یکدیگر را ملاقی نمایند



مطلوبت اولاً محاسبه AM و AC و OC بر حسب R و x ثانیاً رسم

جدول و منحنی تغییرات $y = \bar{A}C' - \bar{A}B'$ هرگاه نقطه H محیط نیم دایره را

طی بناید

۲۰۹- دو محور $x'x''$ و $y'y''$ که با یکدیگر زاویه θ تشکیل میدهند و نقاط ثابت

A و B در روی $y'y$ فاصله $OA = a$ و $OB = b$ و نقطه متغیر

۴. در روی $x'x$ بفواصل $x = \mu$ مفروض است هرگاه $a > b$ باشد

اولاً جدول و منحنی تغییرات $y = \frac{\bar{M}A'}{\bar{H}B'}$ را بر گاه x تغییر کند رسم کنید

ثانیاً در صورتیکه P و Q وضعیتی نقطه M در حالت ماکزیموم و مینیموم λ باشد

تحقیق کنید که دایره نقطه PQ بر نقاط A و B می‌رسد یا نه ثالثاً هرگاه نقطه H'

وضعیت M غیر از وضعیت P و Q باشد معلوم کنید که یک نقطه دیگر M یافت می شود

که برای آن y مساوی همان مقدار باشد در این صورت مطلوبت رابطه مابین قطعات
 $OM' = x$ و $OM'' = x$ را با در صورتیکه نقطه M'' معلوم باشد نقطه M' را

با ترسیم مشخص نمایند

۲۱۰- دو نقطه ثابت O و A با فاصله $OA = a$ و نقطه متغیر M با فاصله

$OM = x$ در روی نیم خطی که با OA زاویه 90° تشکیل میدهد مفروض است مطلوبت

اولاً رسم جدول و منحنی تغییرات $y = \frac{MA^2}{OM}$ را نگاه x از 0 تا

$+\infty$ تغییر کند ثانیاً مقدار x را حساب کنید بطریقی که نسبت فوق مساوی مقدار

معلوم l گردد (بحث) ثالثاً با زاویه مقدار مناسب l برای M دو نقطه

M' و M'' بدست میاید ثابت کنید که دایره $AM'M''$ در نقطه A بر OA

ماس و شعاع آن برابر است با $\frac{l}{\sqrt{3}}$

۲۱۱- معادله $\cos x + a \sin x = l$ که در آن x نمایش قوس مجهول

a و l نمایش مختصات نقطه M واقع در سطح دو محور قائم میباشد مفروض است اولاً

مطلوبت بحث در جوابهای معادله فوق بر حسب موضع نقطه M در سطح دو محور و مقایسه

نتایج قوسهای جواب معادله فوق هرگاه در روی دایره مثلثاتی یک مبدأ اختیار

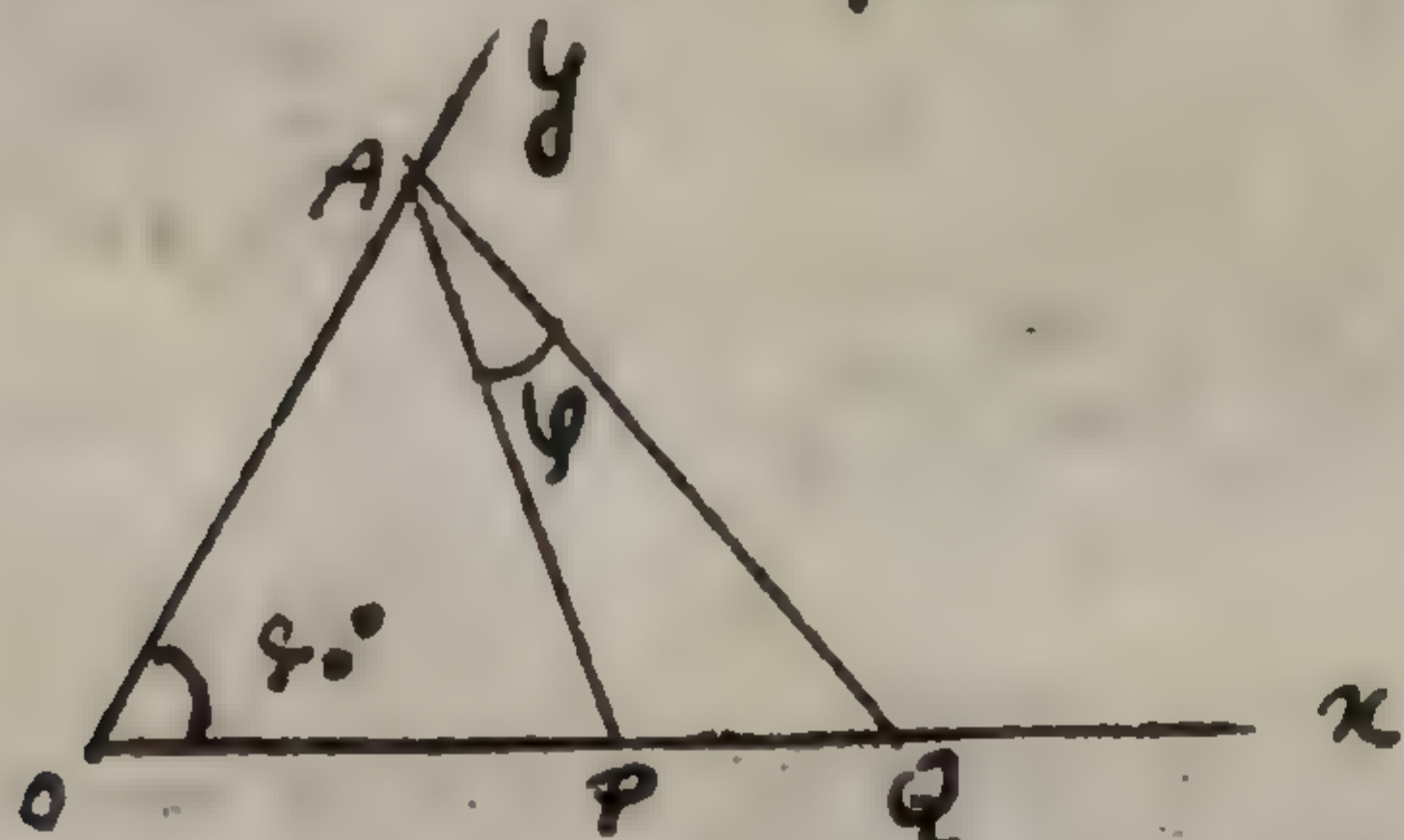
شوند ثانیاً جدول و منحنی تغییرات $y = \cos x + a \sin x$ را نگاه x از 0 تا

2π تغییر کند رسم کنید ثالثاً سطح حادث مابین منحنی و محور x را که در زیر

محور واقع میشود رسم نمایند

۲۱۲- تابع $y = \frac{x}{2x^2 - 5x + 2}$ مفروض است مطلوب است اولاً رسم جدول و منحنی تغییرات آن ثانیاً خط Δ موازی محور $x'x$ عموماً منحنی را در دو نقطه M و M' قطع میکند هرگاه P و P' تصاویر آنها بر محور $x'x$ باشد مطلوب است محاسبه محضات مرکز مربع مستطیل $MM'PP'$ بر حسب h عرض خط Δ ثالثاً ثابت کنید که دایره محیطی این مربع مستطیل باز از جمیع مستدیر h نسبت به دایره ثابتی که معادله آن را تعیین میکنید قائم میباشد

۲۱۳- زاویه $y \circ x$ مساوی 60° و نقطه A در روی oy فاصله $OA = a > 0$



و دو نقطه متغیر P و Q در روی ox فاصله

$OP = x$ و $OQ = a + x$ مفروض است

مطلوب است اولاً محاسبه $AP = p$ و $AQ = q$ و خطوط مشتقاتی زاویه $PAQ = 40^\circ$

بر حسب a و x همچنین تغییرات h هرگاه x تغییر کند ثانیاً x را بطریقی حساب کنید که محیط مثلث APQ مساوی $a(2 + \sqrt{3})$ باشد و در این صورت موضع نقاط P و Q را تعیین کنید

۲۱۴- تابع $y = \frac{3-2x}{2(x-1)^2}$ مفروض است اولاً جدول و منحنی تغییرات

آن را رسم کنید ثانیاً خطی معادله $y = m$ منحنی را ممکن است در دو نقطه M و M'

قطع کند و این صورت معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه های آن طول نقاط M و M'

باشد و از روی آن در وجود این نقاط بحث نمایند ثالثاً مطلوبت تعیین رابطه مانند E مستقل از m باین طولهای این نقاط و از روی آن ثابت کنید که همواره میتوان نقطه مانند H در روی $x'x$ تعیین نمود بطوریکه $\overline{HP} \times \overline{HP'} = c$ باشد بنا بر آنکه P و P' تصاویر M و M' بر محور $x'x$ باشد رابطه ثابت کنید که اگر مبدأ مختصات را بطور مناسبی در روی $x'x$ تغییر دهیم رابطه E را میتوان بصورت $\frac{c}{x'^2 + x''^2}$ نوشت
 خاصاً از روی مطالب ثالثاً ثابت کنید که جمیع دوائر بقطر PP' دارای یک محور اصلی میباشند و با یکدیگر نقطه مشترکی ندارند سادساً از روی مطالب رابطه ثابت کنید که P و P' همیشه نسبت به نقطه ثابت مزدوج توافق یکدیگر میباشند و طول این نقاط را تعیین نمایند

۲۱۵- اولاً مطلوبت تغییرات تابع $y = \frac{1-x^2}{4}$ و $y = x - x^2$ و ثابت کنید که بازه جمیع مقادیر x میباشد مگر بازه یک مقدار که $y > y$ خواهد بود و این مقدار x را حساب کنید ثانیاً معلوم کنید که نقطه M بمختصات (a, b) در کدام ناحیه باید واقع باشد برای آنکه $b < \frac{1-a^2}{4}$ باشد ثالثاً هرگاه a و b دو مقدار معلوم باشند تعیین کنید که آیا برای مقدار ثابت m میتوان مقداری تعیین نمود بطوریکه تابع $x^2 + mx - \frac{1+m^2}{4}$

بازا $x = a$ مساوی b گردد و تحقیق کنید که با نیطریق مقادیر مختلفی برای m بدست میآید یا نه و در حالتی که دو مقدار یافت شود ثابت کنید که منحنی نمایش تغییرات آن بازه ایکی

از این مقدار بر نقطه مشترک بطول محصور مابین α با منحنی لا نخواهد بود

۲۱۶- مثلث ABC که در آن زاویه A قائمه و زاویه B و وتر $BC = a$ معلوم است

فرض شده هرگاه D قرینه A نسبت به وتر BC و I وسط AC باشد نقطه I را به D

وصل میکنیم مطلوب است اولاً محاسبه DI بر حسب a و R و همچنین محاسبه φ زاویای

ADI و ADI بر حسب R و محاسبه آنها در حالتی که $B = 45^\circ$ باشد ثانیاً

فرض میکنیم BC ثابت و زاویه A قائمه و زاویه B تغییر کند مطلوب است تغییرات طول

DI هرگاه B گنگ $\alpha = 1$ فرض شود در رسم مثلث ABC نظیر ماکزیموم DI

۲۱۷- دو محور قائم Ox و Oy و خط $\frac{x}{a} \cos \varphi + \frac{y}{b} \sin \varphi = 1$

مفروض است a و b دو طول معلوم ($a > b$) و φ زاویه حاده میباشد مطلوب است

اولاً محاسبه طول $AB = u$ قطعه از این خط محصور مابین دو محور همچنین محاسبه سطح

$S = \frac{1}{2} AB$ مثلث AOB بر حسب a و b و φ ثانیاً رسم جدول و منحنی تغییرات

u و S هرگاه φ از 0 تا $\frac{\pi}{2}$ تغییر کند ثالثاً مطلوب است محاسبه $\frac{du}{d\varphi}$ و $\frac{dS}{d\varphi}$

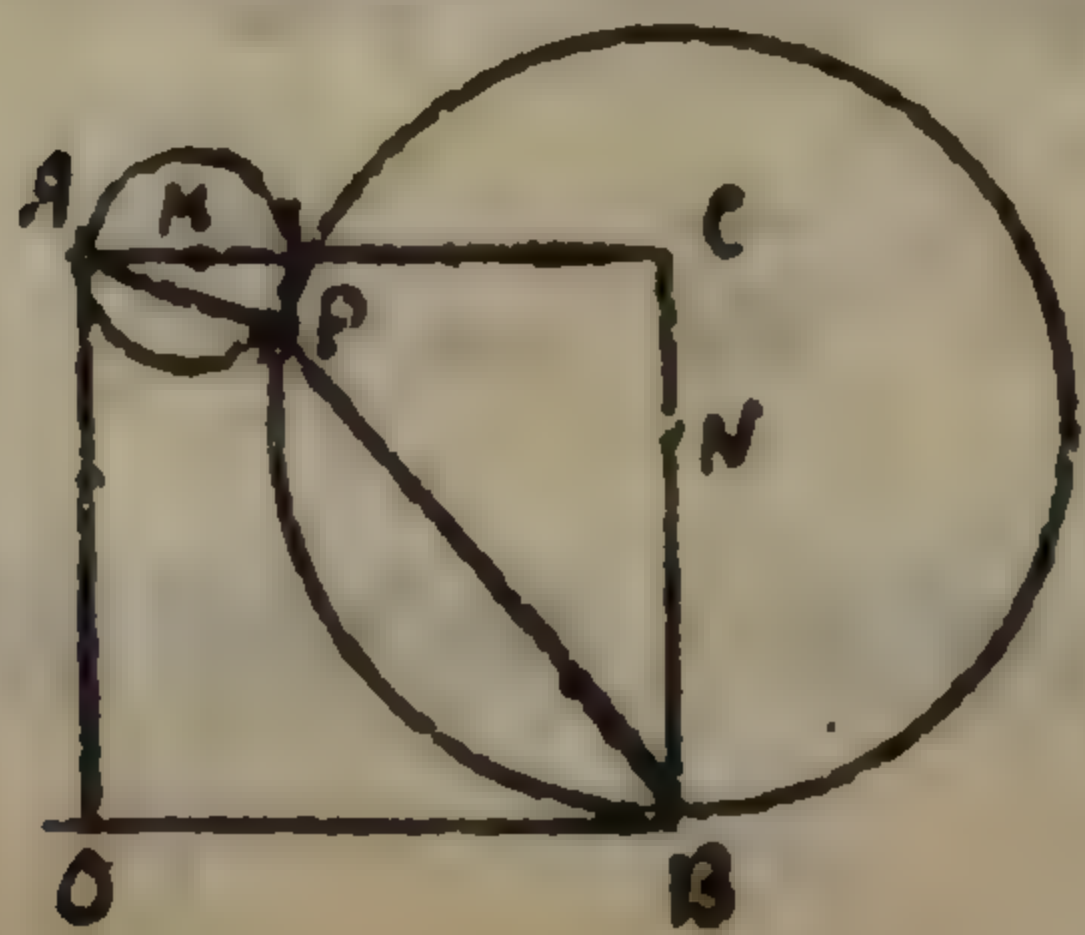
و φ ها بفرض آنکه u مساوی مقدار معلوم l باشد

۲۱۸- مربع $ABCD$ بصلع α و دو دایره متغیر مماس خارج مفروض است مرکز

اولی نقطه H در روی AC بوده

و بر نقطه A مماس نمایند و مرکز دومی

نقطه N در روی BC بوده و بر نقطه B

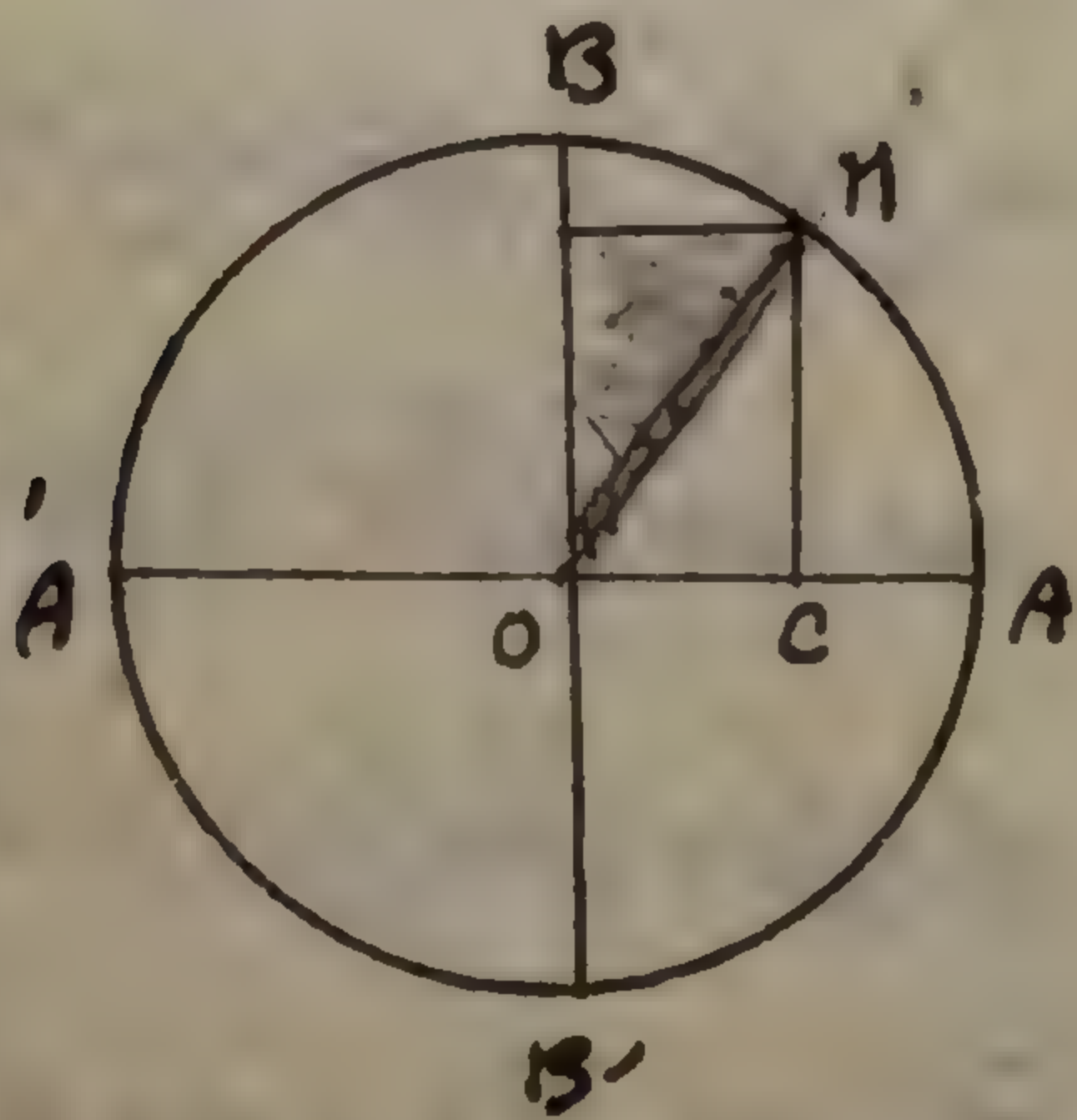


مرور بکنند فرض میکنیم $AN = x$ و $BN = y$ باشد مطلوب است اولاً محاسبه y بر حسب
 x و ثانیاً تغییرات y برگاه x مابین 0 و a تغییر کند ثالثاً هرگاه p نقطه تماس
 دو دایره باشد زاویه APB را حساب کنید

۲۱۹- دو محور عمود بر یکدیگر و نقطه M بمختصات $x = a \times \frac{1-t^2}{1+t^2}$

و $y = a \times \frac{2t}{1+t^2}$ که در آن a ثابت و t متغیر پارامتریت مفروض است
 ثابت کنید که هرگاه t از 0 تا $+\infty$ تغییر کند نقطه M بفاصله ثابت a از مرکز O
 باقیمانده و بنا بر این مکان آن دایره مرکز O و شعاع a میباشد ثانیاً فرض میکنیم نقطه
 B وضعیت M بازاء $t = \infty$ باشد تحقیق کنید که ضریب زاویه خط BM مساوی
 t میباشد ثالثاً خط $x + 3y - 1 = 0$ مفروض است فرض میکنیم نقاط M' و M''
 محل تقاطع آن با منحنی باشد مطلوب است تشکیل معادله درجه دومی بر حسب t که ریشه های
 آن t' و t'' ضریب زاویه خط BM' و BM'' باشد (بحث بر حسب مقادیر)
 رابعاً مطلوب است محاسبه $\angle H'BM''$ بر حسب x

۳۳۰- در دایره شعاع R دو قطر AA' و BB' بر یکدیگر عمود میباشند جهت از A'



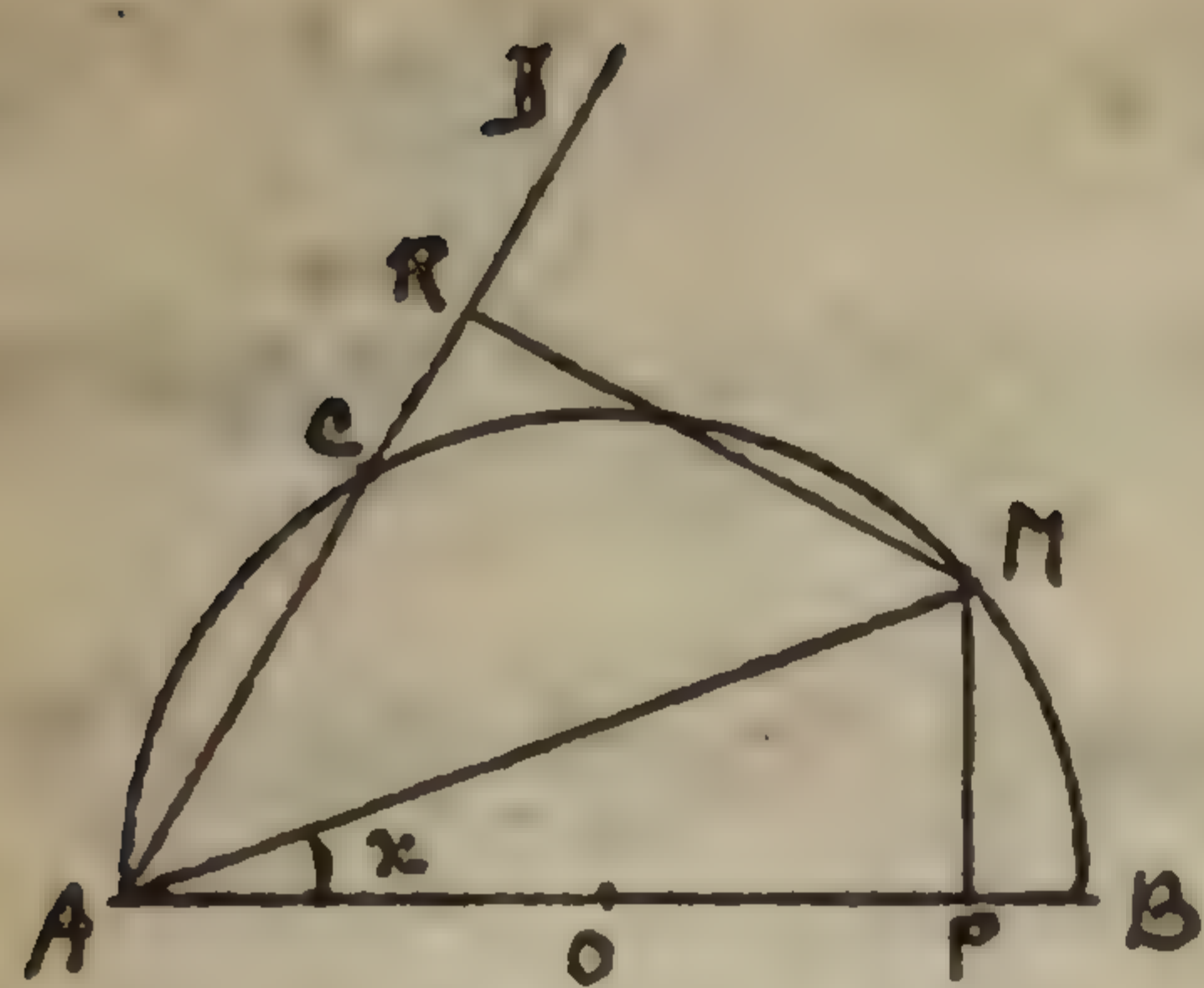
به A و از B' به B راجعت مثبت اختیار میکنیم
 مطلوب است موضع نقطه H در روی دایره فوق
 بطریقی که $\overline{BH} = m \cdot \overline{AC}$ باشد بنا بر آنکه
 تصویر M بر BB' و تصویر H بر

AA' باشد ثانیاً بازاء هر مقدار مثبت m دو نقطه M' و M'' بدست میآید مطلوبست
محاسبه و ترسیم $M'M''$ بر حسب R و m و همچنین سطح مثلث $M'OM''$ و تعیین مقادیر
 m بطریقی که این مثلث متساوی الاضلاع باشد ثالثاً ثابت کنید که خط $M'M''$ بازاء
جمع مقادیر m همواره بر نقطه ثابتی مرور مینماید

۲۲۱- سعی $y' = 2px$ مفروض است اولاً مطلوبست معادله خط قائم
بر منحنی با ضریب زاویه m ثانیاً معلوم کنید از نقطه P واقع در سطح سهمی فوق چند
قائم میتوان بر آن رسم نمود (بحث) با این طریق معلوم میشود بر حسب آنکه نقطه P در یکی از
دو ناحیه که بواسطه منحنی مانند E که معادله آن معلوم نموده و آنرا رسم کنید باشد مسند
دارای یک یا سه جواب خواهد بود ثالثاً سطح حادثه باین منحنی E و سهمی مفروض را حساب
کنید

۲۲۲- بیضی E بمعادله $x^2 + 4(y' - 4) = 0$ مفروض است
اولاً بطریقه تحلیلی ثابت کنید که موازی تمام استدادهای ممکنه میتوان دو خط بیضی تماس
نمود ثانیاً ثابت کنید که یکزوج از این تماسها M' و M'' و نقاط تماس آنها D و D'
همواره ثابت مانده و با تغییر m تغییر نمیکند ثالثاً m را تعیین کنید بطریقی که فاصله نقاط
تماس تماسهای موازی با خط $y = x$ مساوی $\frac{2}{3}$ باشد و بیضی و تماسها را
بازا بر این مقدار m رسم کنید

۲۲۳- نیمدایره بقطر $AB = 2R$ مفروض است از نقطه A قاطع AD را چنان



رسم میکنیم که با قطر AB زاویه x تشکیل دهد

حال چون نقطه مانند H در روی قوس

BC اختیار نموده فرض میکنیم

$\widehat{HAB} = x$ باشد چون از نقطه M عمود MP را بر AB و MR را بر

AR احراز کنیم مطلوبت اولاً محاسبه $y = MP + MR$ بر حسب x و

x در رسم جدول و منحنی تغییرات آن هرگاه x تغییر کند ثانیاً محاسبه سطح حادث باین

منحنی و محور x و محور y و از آن بطول $\frac{1}{2}$ مثلاً x را حساب کنید بطریقی که

$MP + MR = m$ باشد (بحث) رابعاً بحث اخیر را با منحنی تغییرات y تطبیق نمائید

۲۲۴- معادله درجه دوم

$$x^2 - 2ux + 2u^2 - uR^2 = 0$$

که در آن u پارامتر و R مقدار معلومی است مفروض است اولاً مطلوبت تغییرات

x و y ریشه های معادله فوق هرگاه u در حد و دگرگونی تغییر کند در رسم منحنی نمایش

این تغییرات هرگاه مقادیر u در روی محور طولها و سمت دیر نظر ریشه های در روی محور عرضها

نقل شود و از روی منحنی فوق در وجود و علامت ریشه های معادله مفروض بر حسب مقادیر

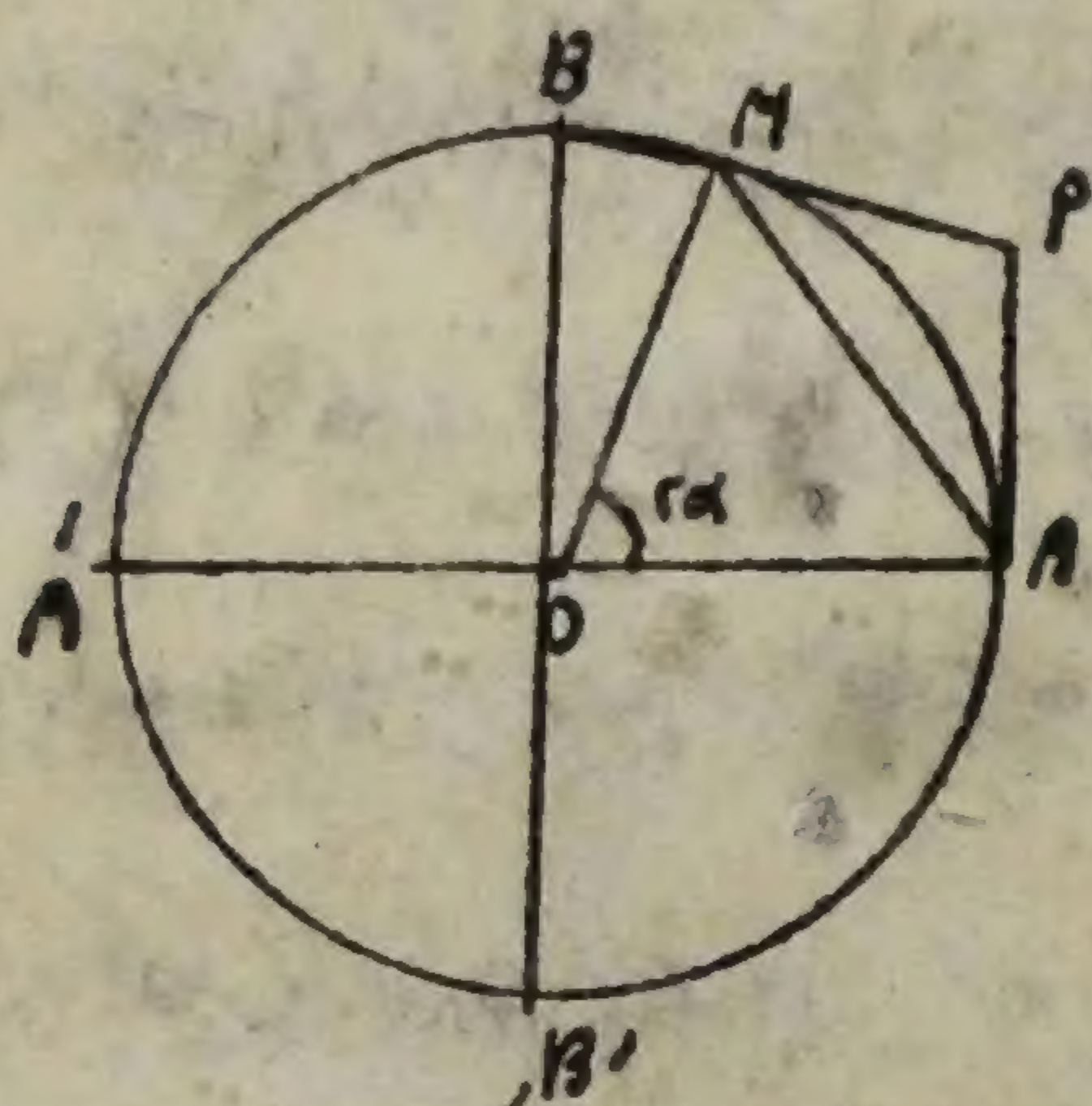
u بحث کنید ثانیاً در روی محور y نقطه B را بر عرض R و در روی محور x و

نقاط A' و A'' را بطول x و y ریشه های معادله فوق فرض کرده بر سه نقطه

A و A' و B دایره میگذرانیم و فرض میکنیم این دایره محور y را در نقطه دیگری B'

قطع کند مطلوبت محاسبه یی عرض نقطه 'B' ثانیاً مختصات نقطه 'C' مرکز این دایره را حساب نمود مکان آن را رسم نماید رابعا با مفروضات فوق تغییرات شعاع این دایره را معلوم کنید خاصا مطلوبت وضعیت نقطه 'A' در روی مکان فوق هرگاه دایره بر محور 'y' یا محور 'x' مماس بوده و یا بر نقطه 'O' مرور نماید

۲۲۵- دایره شعاع R و دو قطر AA' عمود بر یکدیگر مفروض است از نقطه غیر مشخص M



خط MP را بر دایره مماس میکنیم

تا مماس در نقطه A را در نقطه

M قطع کند مطلوبت اولاً محاسبه

و سطح مثلث BOM و اضلاع

و سطح مثلث APM بر حسب R و α ثانیاً هرگاه فرض کنیم $\alpha = \frac{\pi}{4}$

باشد تحقیق کنید که $\frac{S}{C} = \frac{x^3}{1-x^2}$ میباشد ثانیاً جدول و منحنی تغییرات تابع

$y = \frac{x^3}{1-x^2}$ را هرگاه x از ۰ تا + تغییر کند رسم کنید رابعا تحقیق کنید

که هرگاه y شعاع دایره محاطیه مثلث APM باشد رابطه ذیل برقرار است

$$x = R(1 - \cos \alpha)$$

۲۲۶- معادله درجه دوم $2x + 2x^2 + (x+1)^2 = 1$

مفروض است اولاً حدود مقادیر x را تعیین کنید که بازه آنها حدود دارا می مقدار

حقیقی باشد همچنین مطلوبت بحث در علامت ریشه ها ثانیاً هرگاه y کشیدار باشد بر حسب

x باشد که متین معادله فوق را تشکیل میدهد مطلوبست رسم جدول و منحنی تغییرات آن هرگاه

x جمیع سمت دایره ممکنه را دارا شود ثباتاً سطح حادث مابین منحنی فوق و محور x و محور y و

وارد نه بطول $x=1$ را حساب کنید

۲۲۷- تابع $y = \frac{3}{4} a (1-x^2)$ که در آن a نایش پارامتر است

مفروض است اولاً ثابت کنید که بازاء جمیع مقادیر a منحنی نایش تغییرات این تابع از دو نقطه ثابت میگذرد که مختصات آنرا تعیین مینماید ثانیاً ثابت کنید که همواره میتوان دو مقدار

مانند x و y برای a چنان تعیین نمود که دو منحنی نایش تغییرات تابع نظیر این دو مقدار

یکدیگر را بر روی قائمه قطع نمایند ثباتاً مطلوبست دو مقدار برای a بطوریکه دو منحنی y نظیر این

دو مقدار یکدیگر را بر روی قائمه تلاقی نموده و مقدار جبری مساحت سطح محصور مابین دو منحنی

ساوی $\frac{5}{9}$ - گردد رابعاً منحنی y نایش تغییرات تابع مفروض محور $y'y'$ را در نقطه

A قطع مینماید فرض میکنیم a بطریقی تغییر کند که معادله حرکت A در روی محور $y'y'$ حسب

زمان $y = \frac{3}{4} x \frac{(t+1)^3}{t^2+1}$ باشد در اینصورت مطلوبست تغییرات سطح مابین منحنی c

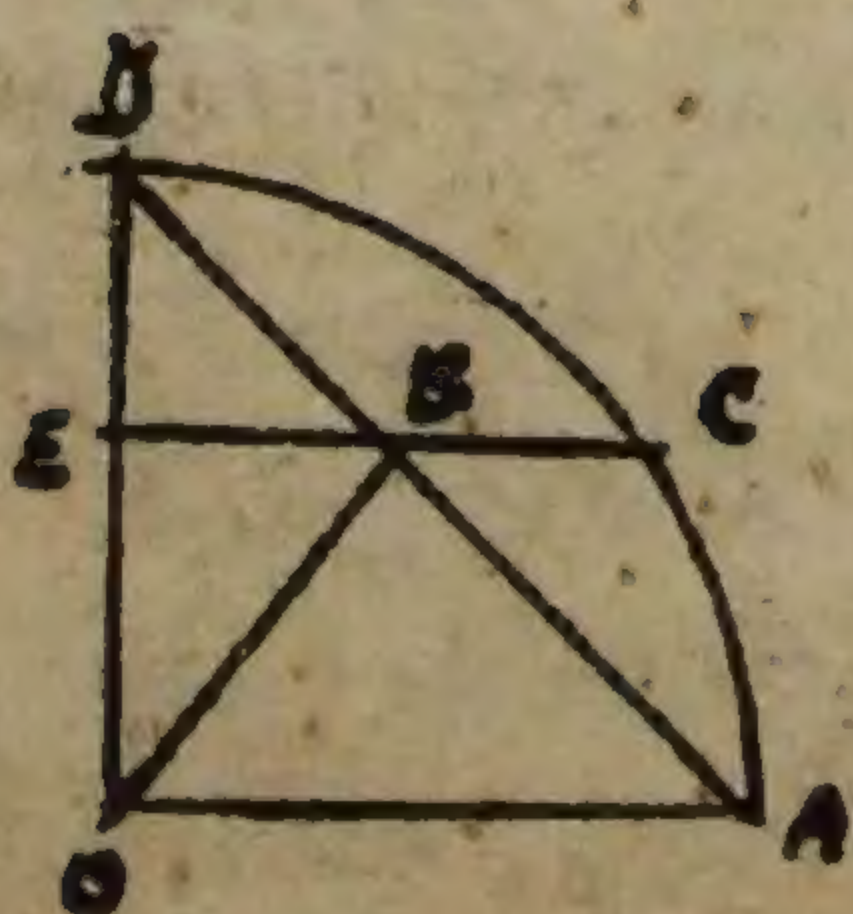
و محور x و x' بر حسب زمان

۲۲۸- ربع دایره شعاع R مفروض است از

نقطه E بفاصله $x = OE$ خط EC را موازی

OA رسم میکنیم تا وتر AB را در نقطه B

قطع کند مطلوبست اولاً محاسبه سطح دو زوننه



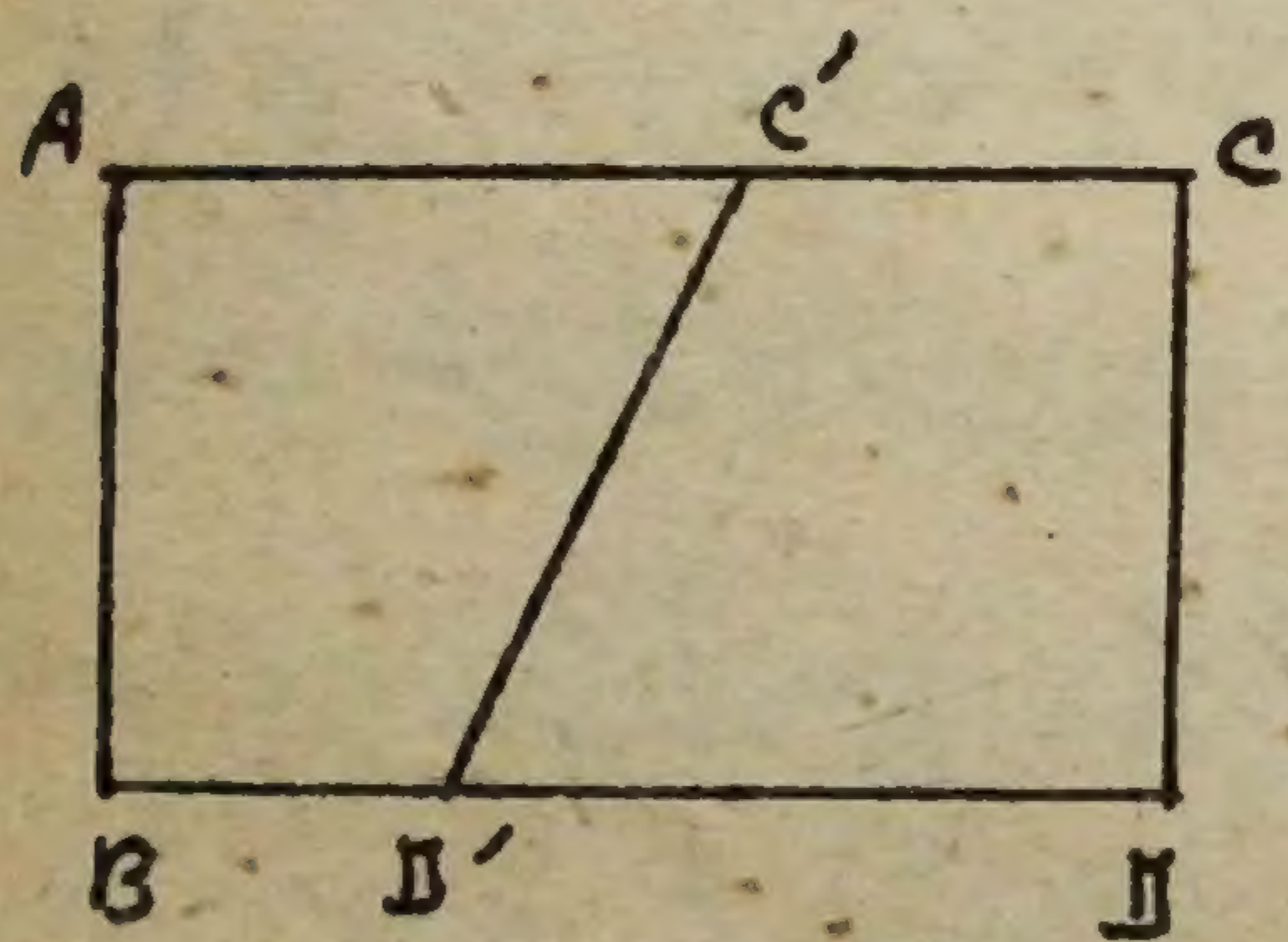
$OACB$ بر حسب x و y در رسم جدول و منحنی تغییرات آن هرگاه x تغییر کند
 ثانیاً بدون استعانت جدول زوایا و اضلاع دوزنقه را در حالتی که دوزنقه قابل محاسبه
 در دایره باشد حساب کنید و تحقیق کنید که در این حالت قاعده OP ماکزیموم خود را دارا
 خواهد بود

۲۲۹- دو خط $x'Ox$ و $y'Oy$ و نقطه ثابت A در روی مسطح الزاویه xOy
 مفروض است فرض میکنیم $xOy = 2a$ و $OA = a$ باشد از نقطه A قاطع
 متغیری رسم میکنیم و فرض میکنیم که $x'n$ را در نقطه P و $y'y$ را در نقطه Q قطع کند هرگاه
 $OP = x$ و $OQ = y$ باشد اولاً ثابت کنید که $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ مقدار است
 ثابت ثانیاً مطلوبت محاسبه x و y بطریقی که سطح مثلث OPQ مساوی مقدار
 معلوم m باشد ثالثاً دایره e مار بر نقاط O و P و Q خط OA را در نقطه دیگر
 M قطع میکند ثابت کنید که نسبت سطح دایره e به سطح مثلث MPQ بستگی بقاطع فوق
 ندارد و مقدار آنرا حساب کنید رابعاً تحقیق کنید که خطوط MP و MQ هرگاه قاطع
 تغییر کند بر دو Coniques بکانون A مماس خواهند بود

۲۳۰- مطلوبت اولاً رسم جدول و منحنی تغییرات تابع $y = (x^2 - 2x + 1)^2$ ثانیاً خط
 $y = 1$ منحنی را در چهار نقطه قطع مینماید که دو بدو قوسی از منحنی را محدود مینمایند مطلوب
 محاسبه سطح سه قطعه مابین این قوسها و وترهای حاصله ثالثاً معادله $(x^4 + 4x^2 + 1)^2 = m$
 که در آن m و p مقادیر معلوم و $m > 0$ میباشد مفروض است مقادیر m و p را

بطریقی انتخاب کنید که معادله دارای چهار جواب باشد همچنین رابطه مابین m و n تعیین نماید بطریقی که چهار جواب جل متوالیه یک قاعد عددی باشند را بجا تحقیق کنید که با وجود شرط فوق میتوان فرض نمود $\frac{1}{4} = \frac{2}{4}$ حال مطلوبت محاسبه ریشه های معادله بر حسب m و بالاخره هرگاه فرض کنیم که $\frac{1}{4} = \frac{2}{4}$ باشد ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای آنکه چهار ریشه منطق باشند آنست که u منطق باشد

۲۳۱- مربع مستطیل $ABDC$ که اضلاع آن a و b میباشد مفروض است مطلوبت اولاً وضعیت خطی مانند $c'd'$ مستکی بر AC و BD بطریقی که طول



آن l باشد ثانیاً تحقیق شرط آنکه نقطه c' مابین A و C و d' مابین B و D باشد ثالثاً مطلوبت وضعیت $c'd'$ بطریقی که سطح

دورنقه $ABDc'$ مسادی K باشد را بجا هرگاه l معلوم باشد مطلوبت حدود K و بالعکس هرگاه K معلوم باشد مطلوبت حدود l خامساً هرگاه دورنقه $ABDc'$ را در حول AB دوران درسیم حجم حادث را حساب کنید سادساً l را بطریقی حساب کنید که حجم فوق مسادی K باشد (باشد l و K و l معلوم فرض شده است)

۲۳۲- تابع $y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x(x+1)}$ مفروض است x را تعیین کنید برای آنکه اولاً مسخنی تغییرات تابع بیک خط مستقیم تبدیل شود ثانیاً مسخنی y با خط $y = -\frac{1}{2}x - 1$